COURS DE MATHEMATIQUES

Licence de Science de la Vie, 1ère année

Semestre 1

N. CHENAVIER

Table des matières

Chapitre 1

Probabilités discrètes

Sommaire

Au sein de l'aléatoire, on distingue deux domaines : la statistique et les probabilités.

- **Statistique** (aspect pratique). Des quantités sont réalisées. On cherche à les décrire.
  - Statistique descriptive (ex : moyenne au sens statistique, écart-type)
  - Analyse de données (ex : droite de régression)
  - Statistique inférentielle (ex : test, intervalle de confiance)
- **Probabilités** (aspect théorique). Aucune quantité n'est encore réalisée. On cherche à prévoir et calculer la probabilité qu'un événement se réalise.
  - Probabilités discrètes.
  - Probabilités continues.

Dans ce chapitre, nous présentons des concepts généraux sur les probabilités discrètes. Ces concepts s'appuient sur les notions d'ensembles et de dénombrement que nous abordons dans un premier temps.

1.1 Ensembles et sous-ensembles

Définition 1.1.1. *On appelle* ***ensemble*** *toute collection d'objets satisfaisant un certain nombre de propriétés. Chacun de ces objets est appelé un élément de cet ensemble.*

- *Si x est un élement de l'ensemble E, on dit que x appartient à E et l'on note $x \in E$.*
- *Sinon, on note $x \notin E$.*

Exemple 1.1.2. 1. Si l'on désigne par E l'ensemble des entiers positifs inférieurs ou égaux à 10, alors $7 \in E$ mais $12 \notin E$.

2. Si l'on désigne par E l'ensemble des villes de France, alors Calais $\in E$ mais Bruxelles $\notin E$.

Parmi les ensembles classiques, on peut citer :

- $\mathbf{N}$: l'ensemble des entiers naturels ;
- $\mathbf{Z}$: l'ensemble des entiers relatifs ;
- $\mathbf{D}$: l'ensemble des nombres décimaux ;
- $\mathbf{Q}$: l'ensemble des nombres rationnels ;

- **R** : l'ensemble des nombres réels.

On admet l'existence d'un ensemble n'ayant aucun élément. Cet ensemble s'appelle l'ensemble vide et est noté $\emptyset$. Pour décrire un ensemble, on procède en général de deux façons :

- Par extension : il s'agit d'énumérer tous les éléments de l'ensemble. L'ensemble s'écrit alors comme une accolade de tous ses élements. Par exemple, si E désigne l'ensemble des entiers positifs inférieurs ou égaux à 10, on a :
$$E = \{0, 1, 2, \ldots, 10\}.$$
En pratique, on n'utilise une telle description que pour les ensembles de petite taille.
- Par compréhension : il s'agit de décrire l'ensemble à travers une (ou plusieurs) propriété(s). Par exemple, si E désigne l'ensemble des entiers positifs inférieurs ou égaux à 10, on a :
$$E = \{n \in \mathbf{N} | n \leq 10\}.$$

Définition 1.1.3. *Soit E un ensemble ayant un nombre fini d'éléments. On appelle cardinal de E, le nombre noté $|E|$ égal au nombre d'élements de E.*

Exemple 1.1.4. Soit $E = \{1, 2, 5, 7\}$. Alors $|E| = 4$.

On présente ci-dessous des relations et opérations sur les ensembles.

Inclusion

Définition 1.1.5. *Soient A et B deux ensembles. On dit que A est inclus dans B si chaque élément de A est un élément de B. On note alors $A \subset B$. On dit aussi "A est contenu dans B" ou "A est une partie de B" ou "A est un sous-ensemble de B".*

Remarque 1.1.6.
1. $A \subset A$ (réflexivité) ;
2. si $A \subset B$ et $B \subset C$ alors $A \subset C$ (transitivité) ;
3. $A = B$ si et seulement si $A \subset B$ et $B \subset A$ (antisymétrie).

Exemple 1.1.7.
1. $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q}$;
2. $\{n \in \mathbf{N} | n \leq 10\} \subset \mathbf{R}_+$.

Intersection et réunion

Définition 1.1.8. *Soient A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E.*
- *L'ensemble $\{x | x \in A$ et $x \in B\}$ est appelé l'intersection des ensembles A et B et est noté $A \cap B$.*
- *L'ensemble $\{x | x \in A$ ou $x \in B\}$ est appelé l'union des ensembles A et B et est noté $A \cup B$.*

Remarque 1.1.9.
1. Si $A \cap B = \emptyset$, on dit que A et B sont disjoints (ne pas confondre avec distinct qui est la négation de égal).
2. Le "ou" apparaissant dans réunion $A \cup B$ est un "ou" inclusif et non exclusif.

Exemple 1.1.10. Soient $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ et $B = \{5, 10\}$. Alors
$$A \cap B = \{5\} \quad \text{et} \quad A \cup B = \{1, 3, 5, 7, 9, 10\}.$$

Remarque 1.1.11. Soient A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E. Alors
1. $A \cap \emptyset = \emptyset$ et $A \cup \emptyset = A$;

2. $A \cap B \subset A$ et $A \cap B \subset B$;
3. $A \subset A \cup B$ et $B \subset A \cup B$;
4. $A \cup B = A$ si et seulement si $B \subset A$;
5. $A \cap B = \emptyset$ si et seulement si $A \subset B$.

Proposition 1.1.12. *Soient A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E. Alors*

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Exemple 1.1.13. Si $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ et $B = \{5, 10\}$, on a vu que

$$A \cap B = \{5\} \quad \text{et} \quad A \cup B = \{1, 3, 5, 7, 9, 10\}.$$

En particulier, on retrouve bien que $|A \cup B| = 5 + 2 - 1 = 6$.

Complémentaire d'un ensemble

Définition 1.1.14. *Soient E un ensemble et A un sous-ensemble de E. L'ensemble $\{x|x \in E \text{ et } x \notin A\}$ s'appelle le complémentaire de A dans E. On le note $E \setminus A$.*

Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur l'ensemble E, on note aussi le complémentaire de A (dans E) sous la forme suivante : A^c ou $\overline{A}$.

Exemple 1.1.15.
1. Soit $E = \{1, 2, \ldots, 10\}$ et $A = \{5, 10\}$. Alors le complémentaire de A est $A^c = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9\}$.
2. Soit $E = \mathbf{N}$ et A l'ensemble des nombres pairs. Alors le complémentaire de A est l'ensemble des entiers impairs.

Définition 1.1.16. *Soient A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E. On appelle ensemble A privé de l'ensemble B l'ensemble suivant :*

$$A \setminus B = \{x|x \in A \text{ et } x \notin B\}.$$

Remarque 1.1.17.
1. Lorsque B est un sous-ensemble de A, l'ensemble $A \setminus B$ est égal au complémentaire de B dans A.
2. $A \setminus B = A \cap B^c$.
3. $A \subset B$ si et seulement si $A \setminus B = \emptyset$.

1.2 Dénombrement

Le problème de base du dénombrement est de compter le nombre de possibilités pour qu'un phénomène se produit. Le concept de base est celui de cardinal.

Définition 1.2.1. *Soit E un ensemble fini. On appelle cardinal de E le nombre d'éléments de E. On note ce nombre $|E|$.*

Proposition 1.2.2. *Soient E et F deux ensembles finis. Alors $|E \cup F| = |E| + |F| - |E \cap F|$.*

Exemple 1.2.3. Considérons les ensembles E et F définis par $E = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ et $F = \{5, 10\}$. La réunion et l'intersection de ces deux ensembles sont donnés par $E \cup F = \{2, 4, 5, 6, 8, 10\}$ et $E \cap F = \{10\}$. Les cardinaux des quatre ensembles considérés sont respectivement égaux à $|E| = 5$, $|F| = 2$, $|E \cup F| = 6$ et $|E \cap F| = 1$. En particulier, on retrouve bien que $|E \cup F| = 5 + 2 - 1 = 6$.

Proposition 1.2.4. *Soient E et F deux ensembles finis. Posons $E \times F := \{(x, y)$ tel que $x \in E$ et $y \in F\}$. Alors $|E \times F| = |E| \cdot |F|$.*

Exercice 1.2.5. *On prélève successivement et sans remise deux boules dans une urne contenant trois boules rouges, deux boules vertes et une boule noire.*

1. *Dénombrer les tirages avec une boule rouge puis une boule verte.*
2. *Dénombrer les tirages avec une boule rouge et une boule verte.*

Proposition 1.2.6. *Soient E un ensemble fini de cardinal n et k un entier tel que $n \leq k$. Alors, le nombre de façon de choisir p éléments parmi les n éléments de E est égal à $\binom{n}{k}$, où*

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Exemple 1.2.7. On prélève simultanément trois boules dans une urne contenant quatre boules rouges, trois boules vertes et une boule noire.
- Le nombre de possibilités de tirer trois boules rouges est égal à $\binom{4}{3} = 4$.
- Le nombre de tirages avec deux boules rouges et une boule verte est égale à $\binom{4}{2} \times \binom{3}{1} = 6 \times 3 = 18$.

1.3 Probabilités

Langage probabiliste

Généralités Dans cette section, on s'intéresse à toute expérience dont on ne peut prévoir le résultat à l'avance. Une telle expérience est dite **aléatoire**.
- Lors d'une expérience aléatoire, chaque résultat possible s'appelle une **éventualité**.
- L'ensemble de tous les résultats possibles de cette expérience aléatoire s'appelle l'**univers** et se note Ω. Dans tout ce qui suit, nous ne considérerons que le cas où Ω est *fini*.
- Toute partie $A \subset \Omega$ s'appelle un **événement**.
- Un événement qui ne contient qu'une éventualité s'appelle un **événement élémentaire**.
- L'événement constitué de toutes les éventualités de Ω qui n'appartiennent pas à A s'appelle l'**événement contraire** et se note A^c.
- Deux événement A et B de l'univers Ω sont dits **incompatibles** (ou disjoints) lorsque $A \cap B = \varnothing$.

Exemple 1.3.1. On jette un dé numéroté de 1 à 6. Ici, $\Omega = \{1, 2, \ldots, 6\}$ et les éventualités sont tous les nombres compris entre 1 et 6. Considérons l'évenement A : "le chiffre obtenu est pair" et B : "le chiffre obtenu est inférieur ou égal à 3". En d'autres termes, $A = \{2, 4, 6\}$ et $B = \{1, 2, 3\}$
- Les événements A et B ne sont pas incompatibles puisque l'on a $A \cap B = \{2\} \neq \varnothing$.
- En particulier, l'événement $A \cap B$ est élémentaire puisqu'il ne contient qu'une éventualité.
- L'événement contraire de A est "le chiffre obtenu est impair" et l'on a $A^c = \Omega \backslash A = \{1, 3, 5\}$. Celui de B est "le chiffre obtenu est supérieur ou égal à 4" et l'on a $B^c = \{4, 5, 6\}$.

Définition 1.3.2. *Soit Ω un ensemble fini et $\mathcal{E}$ l'ensemble des événements de Ω. On appelle probabilité sur Ω tout application $\mathbb{P} : \mathcal{E} \to [0, 1]$ telle que $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ et $\mathbb{P}(A \sqcup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$ dès lors que les événements A et B sont incompatibles.*

Proposition 1.3.3. *Soient A et B deux événements de l'univers Ω. Alors*

(i) $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$ *;*

(ii) $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$.

Remarquons que le premier résulat de la proposition 1.3.3 est étroitement lié à la proposition 1.2.2. En fait, les concepts de cardinal et de probabilité sont fortement liées, notamment à travers la notion d'équiprobabilité.

Equiprobabilité D'après la définition 1.3.2, nous savons que la probabilité d'un événement A est la somme des probabilités des événements élémentaires de A [1]. Un cas particulier est lorsque les probabilités de tous les événements élémentaires sont égales. Dans ce cas, on dit qu'on ait en situation d'**équiprobabilité**.

Proposition 1.3.4. *En situation d'équiprobabilité, pour tout événement $A \subset \Omega$, on a :*

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\textit{nombre de cas favorables}}{\textit{nombre de cas possibles}}.$$

Exemple 1.3.5. Considérons le jet d'un dé à 6 faces. Lorsque celui-ci est non truqué, nous sommes en situation d'équiprobabilité. Considérons à nouveau l'évenement A : "le chiffre obtenu est pair" et B : "le chiffre obtenu est inférieur ou égal à 3". On a alors $\mathbb{P}(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, $\mathbb{P}(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ et $\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{6}$.

Indépendance et conditionnement

Définition 1.3.6. *Soient A et B deux événements de l'univers Ω. On dit que A et B sont **indépendants** si $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$.*

La notion d'indépendance est fondamentale en probabilités, notamment parce qu'elle permet de faire un grand nombre de calculs dès que l'on considère des intersections d'événements. Informellement, deux événements sont indépendants si l'un n'a pas "d'impact" sur l'autre et réciproquement. Le plus souvent, la notion d'indépendance est quelque chose de supposé : par exemple, lorsque l'on jette deux dés simultanément, on suppose que ces jets soient indépendants. Parfois, il est intéressant de montrer que deux événements sont indépendants, notamment pour mener à des calculs plus maniables.

Cependant, lorsque deux événements A et B ne sont pas indépendants, il est également naturel de savoir quel "impact" l'événement A peut avoir sur l'événement B et réciproquement. Le concept sous-jacent est celui de probabilités conditionnelles.

Définition 1.3.7. *Soient A et B deux événements de l'univers Ω. On appelle **probabilité** de A **sachant** B (ou encore probabilité de A conditionnellement à B) le nombre, noté $\mathbb{P}_B(A)$, et défini par*

$$\mathbb{P}_A(B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

En particulier, deux événements A et B sont indépendants si et seulement si $\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A)$ ou encore si et seulement si $\mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(B)$.

Exemple 1.3.8. Considérons le jet d'un dé à 6 faces (non truqué) et les événements A : "le chiffre obtenu est pair" et B : "le chiffre obtenu est inférieur ou égal à 3". Nous avons vu que $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \frac{1}{2}$ et $\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{6}$. En particulier, on a $\mathbb{P}_B(A) = \frac{1}{3}$. En d'autres termes, il y a

1. Mathématiquement, cela se traduit par le fait que $\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega \in A} \mathbb{P}(\{\omega\})$

une chance sur trois que le nombre soit pair sachant que le nombre obtenu est inférieur ou égal à trois. Remarquons que l'on a également, et uniquement pour ce cas particulier, $\mathbb{P}_A(B) = \frac{1}{3}$ ce qui signifie qu'il y a une chance sur trois que le nombre soit inférieur ou égal à 3 sachant que le nombre obtenu est pair.

Remarquons, par ailleurs, que d'après la définition 1.3.2, on a $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap B^c)$. Un tel procédé est à retenir lorsque l'on veut calculer la probabilité d'un événement lorsqu'on ne connait que la probabilité de ce même événement intersecté à un autre. Une conséquence immédiate de ce fait est le résultat suivant, connu sous le nom de *formule des probabilités totales* :

Proposition 1.3.9. *Soient A et B deux événements de probabilités non nulles. Alors*

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}_B(A) \cdot \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}_{B^c}(A) \cdot \mathbb{P}(B^c).$$

Chapitre 2

Polynômes

Sommaire

Dans ce chapitre, on présente quelques rappels sur les fonctions polynômes, c'est-à-dire les fonctions f de la forme $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$, où $a_n, \ldots, a_0$ sont des nombres réels, avec $a_n \neq 0$. Le terme n s'appelle le **degré** de f.

2.1 Equations algébriques

Une équation algébrique est une équation de la forme $f(x) = 0$. Toute solution de $f(x) = 0$ s'appelle une racine de f. Dans ce qui suit, on s'intéresse aux cas particuliers où ce degré est égal à 1 et 2.

Equation de degré 1

Dans le cas où le degré d'une fonction polynôme f est égal à 1, on a $f(x) = ax+b$, où $a, b \in \mathbf{R}$ avec $a \neq 0$. La résolution de l'équation $ax + b = 0$ est immédiate :

$$ax + b = 0 \Longleftrightarrow x = -\frac{b}{a}.$$

Cas d'une inéquation de degré 1 Pour résoudre l'inéquation $ax + b \geq 0$, on considère deux cas :

- Si $a > 0$, alors $ax + b \geq 0 \Longleftrightarrow x \geq -\frac{b}{a}$. En d'autres termes, $ax + b$ est négatif à gauche de la racine et positif à droite.
- Si $a < 0$, alors $ax + b \geq 0 \Longleftrightarrow x \leq -\frac{b}{a}$. En d'autres termes, $ax + b$ est positif à gauche de la racine et négatif à droite.

Equation de degré 2

Dans le cas où le degré d'une fonction polynôme f est égal à 2, on a $f(x) = ax^2 + bx + c$, où $a, b, c \in \mathbf{R}$ avec $a \neq 0$. Pour résoudre l'équation $ax^2 + bx + c = 0$, on procède comme suit :

1. On calcule le discriminant $\Delta := b^2 - 4ac$.
2. On discute du nombre de solutions de l'équation en fonction du signe du discriminant :
   - Si $\Delta > 0$, il y a deux racines données par :
   $$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}. \tag{2.1.1}$$
   - Si $\Delta = 0$, il y a une racine (double) donnée par :
   $$x_1 = -\frac{b}{2a}.$$
   - Si $\Delta < 0$, il n'y a pas de solutions (réelles).

Démonstration. Pour montrer que les racines (lorsqu'elles existent) sont données par ce qui précède, on commence par écrire le polynôme sous sa forme canonique. Plus précisément, on a :

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) \\ &= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) \\ &= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right). \end{aligned}$$

L'écriture ci-dessus est la forme canonique du polynôme. En d'autres termes,

$$ax^2 + bx + c = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right).$$

- Si $\Delta > 0$, alors $\sqrt{\Delta}$ existe (et est réel). En utilisant la troisième identité remarquable : $\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha + \beta)(\alpha - \beta)$, on obtient :
$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \frac{b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right).$$
En particulier, $ax^2 + bx + c = 0$ si et seulement $x = x_1$ ou $x = x_2$, où x_1 et x_2 sont donnés dans (2.1.1).
- Si $\Delta = 0$, on a : $ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ et il n'y a qu'une seule racine (double), donnée par $x = -\frac{b}{2a}$.
- Si $\Delta < 0$, alors $\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right) > 0$ en tant que somme de deux carrés (dont le second est non nul). Dans ce cas, on a $a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right) \neq 0$ et l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ n'admet aucune solution (réelle).

□

Cas d'une inéquation de degré 2 Pour résoudre l'inéquation $ax^2 + bx + c \geq 0$, on procède comme suit :

1. On commence par résoudre l'équation $ax^2 + bx + c = 0$.

2. On discute trois possibilités :
   - Si $ax^2+bx+c=0$ admet deux solutions, alors ax^2+bx+c est du signe de a à l'extérieur des racines et est du signe de a à l'intérieur des racines.
   - Si $ax^2+bx+c=0$ admet une solution (double), alors ax^2+bx+c est du signe de a (et s'annule en l'unique racine du polynôme).
   - Si $ax^2+bx+c=0$ n'admet aucune solution, alors ax^2+bx+c est du signe de a (et ne s'annule jamais).

Equation de degré $n \geq 3$

Pour résoudre une équation de degré $n \geq 3$, on procède comme suit :
- On commence par déterminer des solutions évidentes.
- On factorise le polynôme en fonction de ces solutions évidentes.
- On se ramène à résoudre une équation de degré 1 ou 2.

Remarque 2.1.1.
1. Il n'est pas toujours aisé de trouver des solutions simples d'une équation de degré n. En fait, lorsque le polynôme est de degré inférieur ou égal à 4, il existe des formules, dans le même esprit que pour les équations de degré 2, qui permettent de trouver les solutions (méthode de Cardan/Ferrari).
2. Pour une équation de degré supérieur ou égal à 5, on peut montrer qu'il est impossible de donner des formules générales, sous forme radicale, des solutions de l'équation (théorème d'Abel/Galois).

2.2 Représentations graphiques

Droites

Si f est une fonction polynomiale de degré 2, c'est-à-dire de la forme $f(x)=ax+b$, alors la courbe représentative de la fonction est une droite affine. L'équation de cette droite (affine, non verticale) est de la forme : $y=ax+b$. Le terme a s'appelle le coefficient directeur de la droite et le terme b s'appelle l'ordonnée à l'origine. Pour déterminer l'équation d'une droite passant par deux points $A(x_A,y_A)$ et $B(x_B,y_B)$, on peut :
- Résoudre directement le système de deux équations à deux inconnues (en a et b) suivant :

$$\begin{cases} y_A = ax_A + b \\ y_B = ax_B + b. \end{cases}$$

- Calculer directement le coefficient directeur : $a=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$ puis déterminer l'ordonnée à l'origine.

Une représentation graphique d'une droite est fournie dans la figure 2.1.

Paraboles

Si f est une fonction polynomiale de degré 2, c'est-à-dire de la forme $f(x)=ax^2+bx+c$, alors la courbe représentative de la fonction est une parabole.
- Si $a>0$, la parabole est décroissante à gauche de $-\frac{b}{2a}$, atteint son minimum en $-\frac{b}{2a}$, et est croissante à droite de $-\frac{b}{2a}$.

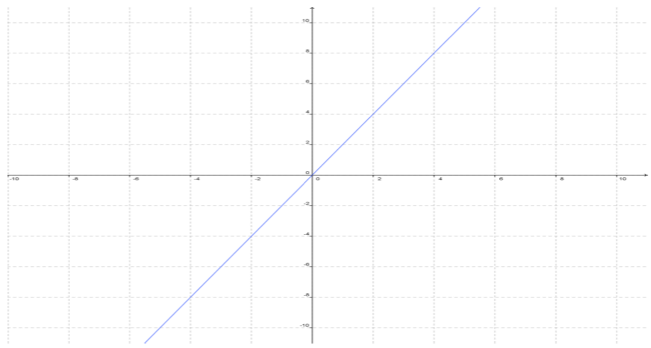

Figure 2.1 – Droite représentative d'une fonction affine

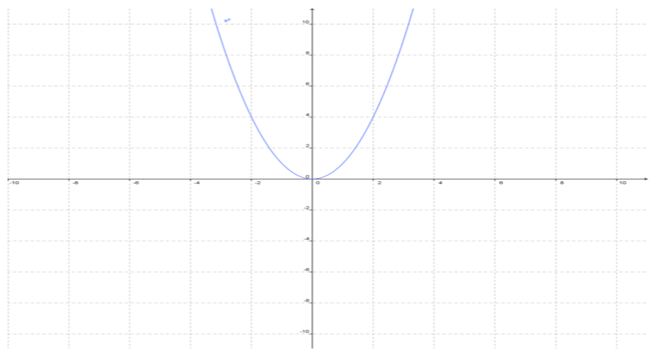

Figure 2.2 – Parabole

- Si $a < 0$, la parabole est décroissante à droite de $-\frac{b}{2a}$, atteint son maximum en $-\frac{b}{2a}$, et est décroissante à droite de $-\frac{b}{2a}$.

Une représentation graphique d'une droite est fournie dans la figure 2.2.

Chapitre 3

Dérivation

Sommaire

3.1 Dérivabilité d'une fonction

Dans tout ce qui suit, on désigne par $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction réelle définie sur un intervalle I de $\mathbf{R}$.

Premières définitions

Point de vue local

Définition 3.1.1. *Soit $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction et soit $x_0 \in \mathbf{R}$ un nombre réel. On appelle **dérivée de f au point** x_0, la quantité suivante (lorsqu'elle existe) :*

$$f'(x_0) := \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Le terme $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ s'appelle le **taux d'accroissement** de la fonction f au voisinage de x_0. La dérivée de f en x_0 est alors la limite de ce taux lorsque h tend vers 0.

Exemple 3.1.2. 1. Considérons le cas où $f(x) = 4x$ et $x_0 = 3$. Alors $f'(3) = 4$.

2. Considérons le cas où $f(x) = x^2$ et $x_0 = 1$. Alors $f'(1) = 2$.

Géométriquement, le fait qu'une fonction f admette une dérivée en un point x_0 se traduit par le fait qu'elle est *lisse* en ce point. La courbe de f possède alors une tangente et le coefficient directeur de la tangente est égal à $f'(x_0)$. Plus préciément, on a le résultat suivant :

Proposition 3.1.3. *Soit $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction dérivable en un point $x_0 \in I$. Alors la courbe représentative de f admet une tangente au point d'abscisse x_0 et d'équation :*

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Point de vue global On étend la notion de dérivée ponctuelle à la notion de dérivée globale de la façon suivante.

Définition 3.1.4. *Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction et $I \subset \mathbf{R}$ un intervalle. Si, pour tout $x \in I$, la quantité $f'(x)$ existe, on dit que f est dérivable sur l'intervalle I et l'on dit que la fonction $f' : x \mapsto f'(x)$ s'appelle la* ***fonction dérivée*** *(ou plus simplement dérivée) de la fonction f.*

Exemple 3.1.5.
1. Considérons le cas où $f(x) = 4x$ et $I = \mathbf{R}$. Alors, pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a $f'(x) = 4$.
2. Considérons le cas où $f(x) = x^2$ et $I = \mathbf{R}$. Alors, pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a $f'(x) = 2x$.

Il arrive qu'une fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ne soit pas dérivable en certain point. On dit alors que l'ensemble des points en lesquels f est dérivable (c'es-à-dire en lesquels f' existe) est l'**ensemble de dérivabilité** de la fonction f.

Dérivées de fonctions usuelles

En pratique, on ne calcule par la dérivée f' de f à partir du taux d'accroissement car cela peut mener à de longs calculs. On préfère plutôt décomposer la fonction f en des fonctions élémentaires, dites usuelles, et faire ensuite des opérations via cette décomposition. Les dérivées de ces fonctions sont synthétisées dans le tableau ci-dessous :

Fonction	Dérivée	Domaine de dérivabilité
$f(x) = a$	$f'(x) = 0$	$\mathbf{R}$
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$	$\mathbf{R}$
$f(x) = x^2$	$f'(x) = 2x$	$\mathbf{R}$
$f(x) = x^n$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$\mathbf{R}(n \in \mathbf{R})$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbf{R}_+^*$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	$\mathbf{R}_-^*, \mathbf{R}_+^*$

TABLE 3.1 – Dérivées de fonctions usuelles

Exemple 3.1.6. Considérons la fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par $f(x) = x^6$. Alors f est dérivable en tout point et, pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a : $f'(x) = 6x^5$.

Remarque 3.1.7. Rappelons que si $\alpha = \frac{p}{q}$ est un nombre rationnel et si $x > 0$ est un nombre strictement positif, alors $x^\alpha = x^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{x^p}$. On peut alors montrer que la fonction $x \mapsto x^\alpha$ est dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$ et que sa dérivée est donnée par :

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}.$$

Exemple 3.1.8.
1. Posons $\alpha = -1$ et dérivons $x^\alpha = x^{-1}$. D'après la remarque précédente, on a :

$$(x^{-1})' = -1x^{-1-1} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}.$$

En particulier, on retrouve le fait que la dérivée de x^{-1} est $-\frac{1}{x^2}$.

2. Posons $\alpha = \frac{1}{2}$ et dérivons $x^\alpha = x^{1/2} = \sqrt{x}$. D'après la remarque précédente, on a :

$$(x^{1/2})' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

En particulier, on retrouve le fait que la dérivée de $\sqrt{x} = x^{1/2}$ est $\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

En pratique, les fonctions que nous rencontrerons dans ce chapitre feront toutes intervenir des expressions de la forme x^α :
- lorsque α est un entier positif, on reconnaitra l'expression d'un polynôme ;
- lorsque α est un entier négatif, on reconnaitra l'expression d'une fraction rationnelle ;
- lorsque α est un nombre rationnel, on reconnaitra l'expression d'une racine.

Opérations algébriques

Les propriétés suivantes fournissent une méthode pratique pour calculer la dérivée d'une fonction à partir des dérivées des fonctions usuelles.

Proposition 3.1.9. *Soient f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle $I \subset \mathbf{R}$. Alors :*
1. $(f+g)' = f' + g'$ *;*
2. $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$ *;*
3. $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

Remarque 3.1.10. En particulier, pour tout $a, b \in \mathbf{R}$, on a : $(f+a)' = f'$ et $(b \cdot f)' = b \cdot f'$.

Exercice 3.1.11. *Calculer les dérivées des fonctions f, g et h définies, pour tout $x \in \mathbf{R}$, par :*
1. $f(x) = x^2 - 2x + 1$ *;*
2. $g(x) = x^3 + 3x^2 - 5$ *;*
3. $h(x) = \frac{3x-1}{x^2+1}$.

Proposition 3.1.12. *(Règle de dérivation en chaîne d'une fonction puissance) Soit $f : I \to \mathbf{R}_+^*$, une fonction dérivable sur un intervalle I et soit $\alpha = \frac{p}{q}$ un nombre rationnel. Alors la fonction g définie par $g(x) = (f(x))^\alpha$ est dérivable sur I et sa dérivée est donnée par :*

$$(g(x)^\alpha)' = \alpha g(x)^{\alpha-1}.$$

3.2 Sens de variations

Définition 3.2.1. *Soit $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction définie sur un intervalle I. On dit que :*
1. *f est **croissante** sur I si $x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$;*
2. *f est **décroissante** sur I si $x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$;*
3. *f est **constante** sur I s'il existe une constante a telle que $f(x) = a$ pour tout x.*

Lorsque f est croissante ou décroissante, on dit qu'elle est **monotone**. Remarquons qu'une fonction est constante si et seulement si elle est simultanément croissante et décroissante. On parle de **sens de variation** d'une fonction pour désigner le caractère croissant ou décroissant des restrictions de cette fonction aux intervalles sur lesquels elle est monotone.

Exemple 3.2.2. 1. La fonction f définie par $f(x) = x^2-2x+1$ est décroissante sur l'intervalle $]-\infty, 1]$ et croissante sur l'intervalle $[1, +\infty[$.

2. La fonction définie par $g(x) = x^3 + 3x^2 - 5$ est croissante sur $\mathbf{R}_+$.

En pratique, il est difficile de déterminer le sens de variation d'une fonction uniquement à partir de son expression analytique. Le plus souvent, on utilise la proposition suivante.

Proposition 3.2.3. *Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. Alors :*

1. *f est croissante sur I si et seulement si, pour tout $x \in I$, on a $f'(x) \geq 0$;*
2. *f est décroissante sur I si et seulement si, pour tout $x \in I$, on a $f'(x) \leq 0$;*
3. *f est constante sur I si et seulement si, pour tout $x \in I$, on a $f'(x) = 0$.*

Exercice 3.2.4. *Retrouver, en utilisant la notion de dérivée, les sens de variations des fonctions f et g définies, pour tout $x \in \mathbf{R}$ par : $f(x) = x^2 - 2x + 1$ et $g(x) = x^3 + 3x^2 - 5$.*

3.3 Recherche d'extremums

Définition 3.3.1. *Soit $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction définie sur un intervalle I. On dit que :*

1. *f possède un **maximum** M sur I s'il existe $x_0 \in I$ tel que $f(x_0) = M$ et si, pour tout $x \in I$, on a : $f(x) \leq M$;*
2. *f possède un **minimum** m sur I s'il existe $x_0 \in I$ tel que $f(x_0) = M$ et si, pour tout $x \in I$, on a : $f(x) \geq m$.*

On parle d'extremum d'une fonction pour désigner indifféremment son maximum ou/et son minimum (s'ils existent).

Exemple 3.3.2. 1. La fonction f définie, pour tout $x \in \mathbf{R}$, par $f(x) = x^2$ possède un minimum en 0, valant 0 en ce point, et ne possède pas de maximum.

2. La fonction cos possède un maximum sur $\mathbf{R}$ égal à 1 et un minimum égal à -1.

Le procédé suivant donne une condition nécessaire (mais pas suffisante) pour qu'un point réalise le maximum ou le minimum d'une fonction.

Proposition 3.3.3. *Soit $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction définie sur un intervalle I ouvert. Supposons que f atteigne son maximum (respectivement son minimum) en un point $x_0 \in I$. Alors $f'(x_0) = 0$.*

Remarque 3.3.4. 1. Graphiquement, le fait que la dérivée s'annule en le maximum ou le minimum se traduit par le fait que la courbe admet une tangente horizontale en x_0.

2. La réciproque de la proposition précédente n'est pas vraie : si $f'(x_0) = 0$, cela ne signifie par nécessairement que f atteint son maximum ou son minimum en x_0. Par exemple, la fonction f définie par $f(x) = x^3$ est telle que $f'(0) = 0$ et pourtant f ne possède ni maximum ni minimum en 0.

Il existe cependant une "sorte de réciproque" de la proposition **??** en ajoutant une hypothèse sur la dérivée de la fonction. La notion sous-jacente est celle d'extremum local.

Définition 3.3.5. *Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction. On dit que f possède un extremum local en x_0 (respectivement maximum local ou minimum local) s'il existe un intervalle sur lequel x_0 est un extremum de f (respectivement un maximum ou un minimum).*

Exemple 3.3.6. 1. La fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, x \mapsto x^2 + 1$ possède un minimum local en 0, qui est aussi un minimum (global) de f sur $\mathbf{R}$.

2. La fonction $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, x \mapsto x^3 - 3x$ possède un maximum local (mais non global) en -1 et un minimum local (mais non global) en 1.

Proposition 3.3.7. *Soit $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur un intervalle I ouvert (c'est-à-dire telle que f'' existe et est continue). Soit $x_0 \in I$ tel que $f'(x_0) = 0$.*

1. Si $f''(x_0) > 0$, alors f possède un maximum local en x_0.

2. Si $f''(x_0) < 0$, alors f possède un minimum local en x_0.

Exemple 3.3.8. La proposition ci-dessus permet de retrouver le fait que la fonction $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, x \mapsto x^3 - 3x$ possède un maximum local en -1 et un minimum local en 1.

Remarque 3.3.9. 1. Si $f''(x_0) = 0$, on ne peut pas conclure en général.

2. Cependant, si $f''(x_0) = 0$ et que f'' change de signe de part et d'autre de x_0, on dit que x_0 est un point d'inflexion. Graphiquement, cela se traduit par le fait que la courbe "traverse" la tangente en x_0 : la courbe passe alors d'une allure concave à une allure convexe (ou réciproquement). C'est le cas, notamment, de la fonction $x \mapsto x^3$.

Nature d'un point singulier On parle de **point singulier** d'une fonction f pour désigner un point x_0 tel que $f'(x_0) = 0$. Pour déterminer les points singuliers et préciser leurs natures, on procède comme suit :

1. On calcule $f'(x)$ et on résout l'équation $f'(x) = 0$ (détermination des valeurs des points singuliers).
2. On calcule $f''(x)$ (détermination des natures des points singuliers)
   - Si $f''(x_0) > 0$, on a un minimum local.
   - Si $f''(x_0) < 0$, on a un maximum local.
   - Si $f''(x_0) = 0$ et que f'' est positif à gauche (respectivement à droite) de x_0 et négatif à droite (respectivement à gauche), on a un point d'inflexion.

Exemple 3.3.10. 1. La fonction f définie par $f(x) = x^2$ admet un minimum local en 0.

2. La fonction f définie par $f(x) = -(x-1)^2$ admet un maximum local en 1.
3. La fonction f définie par $f(x) = x^3 + 2$ admet un point d'inflexion en 1.

3.4 Approximation linéaire

Proposition 3.4.1. *Soit $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction dérivable en un point x_0 de I. Alors il existe une fonction ϵ, tendant vers 0 lorsque x tend vers x_0, telle que :*

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \epsilon(x).$$

En d'autres termes, au voisinage de x_0, on a : $f(x) \simeq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. Un tel fait permet, en pratique, d'avoir une valeur approchée d'une fonction en un point, qu'il ne serait pas forcément facile de calculer directement.

Exemple 3.4.2. Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{x}$ et soit $x_0 = 9$ et $x = 9.1$. On sait que $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. On en déduit que :

$$\sqrt{9.1} = f(9.1) \simeq f(9) + f'(9)(9.1 - 9) = \sqrt{9} + \frac{1}{2\sqrt{9}}(9.1 - 9) = 3.017.$$

En particulier, $\sqrt{9.1} \simeq 3.017$.

Chapitre 4

Fonctions usuelles

Sommaire

4.1 Fonction exponentielle

Définition et premières propriétés

Pour définir la fonction exponentielle, nous admettons le résultat suivant :

Proposition 4.1.1. *Il existe une unique fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ satisfaisant les trois propriétés suivantes :*

1. *la fonction f est dérivable sur $\mathbf{R}$;*
2. *la valeur en 0 est donnée par $f(0) = 1$;*
3. *pour tout $x, y \in \mathbf{R}$, on a $f(x+y) = f(x) \times f(y)$.*

Définition 4.1.2. *On appelle **fonction exponentielle** l'unique fonction satisfaisant simultanément les trois propriétés de la proposition 4.1.1.*

On note cette fonction : exp. Une particularité de la fonction exponentielle est qu'elle transforme la somme en un produit. A quelques modifications près (voir la section **??**), elle est la seule à voir une telle propriété. Le graphe de cette fonction est donné la figure 4.1.

On peut montrer que la fonction exp satisfait les propriétés suivantes :

Propriété 4.1.3. *La fonction exponentielle* $\exp : \mathbf{R} \to \mathbf{R}_+^*$ *est :*

1. *strictement positive sur $\mathbf{R}$ tout entier ;*
2. *croissante sur $\mathbf{R}$ tout entier ;*
3. $\lim_{x\to-\infty} \exp(x) = 0$ *et* $\lim_{x\to+\infty} \exp(x) = +\infty$.

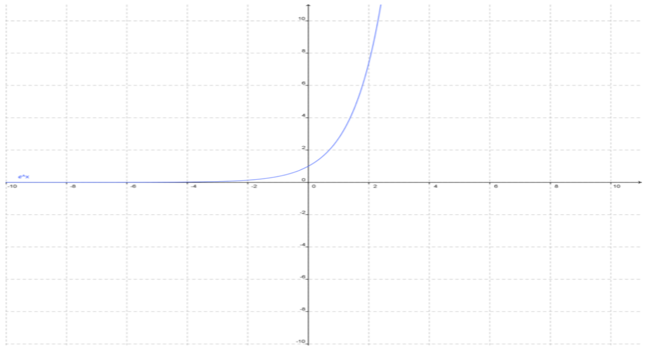

FIGURE 4.1 – Courbe représentative de la fonction exponentielle

D'après la figure 4.1, on constate d'une part que la fonction exponentielle est très proche de 0 pour des valeurs de x négatives ; et d'autre part que la fonction croît très vite vers l'infini. Cette fonction est bien liée au langage commun : lorsque l'on dit que quelque chose croit exponentiellement, cela signifie que sa croissance se fait extrêmement vite.

En fait, le comportement de la fonction exponentielle est très fortement lié à celui des puissances d'un nombre. Par exemple, l'allure de la représentation graphique de la suite 2^n ressemble à celle de $\exp(n)$. C'est la raison pour laquelle il est d'usage de noter la fonction exp sous la forme suivante :

$$\exp(x) = e^x.$$

Le nombre e est donné par $e := \exp(1) \simeq 2.72$. En d'autres termes, lorsque n est un entier, on a $\exp(n) = e^n \simeq 2.72^n$.

En particulier, toutes les propriétés relatives aux puissances entières d'un nombre restent vraies pour la fonction exponentielle. En d'autres termes, pour tout $x, y \in \mathbf{R}$, on a :

$$e^0 = 1; \quad e^{x+y} = e^x \times e^y; \quad e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}; \quad e^{x\times y} = (e^x)^y.$$

Exemple 4.1.4.
1. Pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a $e^{6x} = (e^x)^6$;
2. Pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a $e^{3x} = (e^x)^3$.

Exercice 4.1.5.
1. *Simplifier les expressions* $e^2 \times e^{-1.5} \times \frac{1}{e}$ *et* $e^3 \times (e^{-3} - 1)$.
2. *Montrer que* $(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2 = 4$ *pour tout* $x \in \mathbf{R}$.

Dérivation de la fonction exponentielle

Une propriété intrinsèque à la fonction exponentielle est que sa dérivée est égale à elle-même. En d'autres, pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a :

$$\exp'(x) = \exp(x).$$

Plus généralement, on a la proposition suivante :

Proposition 4.1.6. *Soit* $f : I \to \mathbf{R}$ *une fonction dérivable sur un intervalle* $I \subset \mathbf{R}$. *Alors la fonction* $x \mapsto \exp(f(x))$ *est dérivable sur* I *et, pour tout* $x \in I$, *on a :* $(\exp(f(x)))' = f'(x) \times \exp(f(x))$.

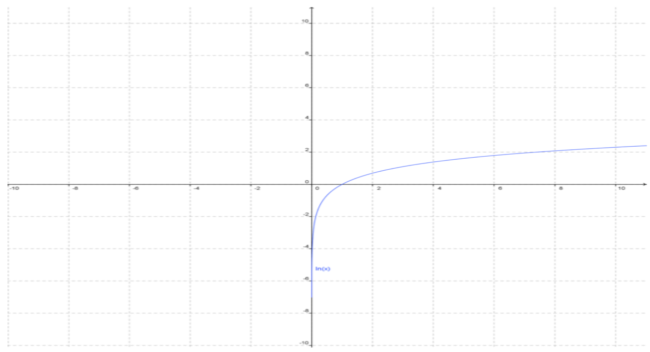

FIGURE 4.2 – Courbe représentative de la fonction sinus

Exemple 4.1.7. 1. Considérons le cas où $I = \mathbf{R}$ et $f(x) = x^2$. La dérivée de la fonction définie par $\exp(x^2)$ pour tout $x \in \mathbf{R}$ est donnée par :

$$(\exp(x^2))' = (x^2)' \times \exp(x^2) = 2x \exp(x^2).$$

2. Considérons le cas où $I = \mathbf{R}$ et $f(x) = x^3 - x$. La dérivée de la fonction définie par $\exp(x^3 - x)$ pour tout $x \in \mathbf{R}$ est donnée par :

$$(\exp(x^3 - x))' = (x^3 - x)' \times \exp(x^3 - x) = (3x^2 - 1) \exp(x^3 - x).$$

4.2 Fonction logarithme

Dans cette section, nous introduisons une seconde fonction usuelle qui, en un sens précisé ultérieurement, est le complément de la fonction exponentielle.

Définition et premières propriétés

Proposition 4.2.1. *Il existe une unique fonction $f : \mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}$ satisfaisant les trois propriétés suivantes :*

1. *la fonction f est dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$;*
2. *la valeur en 1 est donnée par $f(1) = 0$;*
3. *pour tout $x, y \in \mathbf{R}_+^*$, on a $f(x \times y) = f(x) + f(y)$.*

Définition 4.2.2. *On appelle **fonction logarithme** l'unique fonction satisfaisant simultanément les trois propriétés de la proposition 4.2.1.*

On note cette fonction ln. Le graphe de la fonction logarithme est donné dans la figure 4.2. On peut montrer que la fonction ln satisfait la propriété suivante :

Propriété 4.2.3. *1. La fonction logarithme $\ln : \mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}$ est croissante sur $\mathbf{R}_+^*$.*

2. $\lim_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$.

D'après la figure 4.2, on constate que la fonction logarithme converge très lentement vers l'infini. Une propriété fondamentale de la fonction logarithme est qu'elle. transforme le produit en somme. Pour tout $x, y \in \mathbf{R}_+^*$, on a donc :

$$\ln(1) = 0; \quad \ln(x \times y) = \ln(x) + \ln(y); \quad \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y); \quad \ln\left(x^y\right) = y\ln(x).$$

Cette propriété est en dualité avec la fonction exponentielle qui effectue l'opération inverse : transformer une somme en un produit. C'est en particulier, parce que les propriétés de ces deux fonctions sont duales l'une de l'autre que les fonctions exponentielle et logarithme sont complémentaires. Mathématiquement, cela se traduit de la façon suivante :

Proposition 4.2.4. *1. Pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a : $\ln(\exp(x)) = x$.*

2. Pour tout $y \in \mathbf{R}_+^*$, on a : $\exp(\ln(y)) = y$.

En d'autres termes, on a l'équivalence suivante :

$$e^x = y \Longleftrightarrow x = \ln(y).$$

Exemple 4.2.5. 1. Pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$, on a : $\ln(6x) = \ln(6) + \ln(x)$.

2. Pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$, on a : $\ln(x^3) = 3\ln(x)$.

Exercice 4.2.6. *1. Calculer $\ln(e)$ et $\ln\left(e^{1/2}\right)$.*

2. Résoudre les équations suivantes :
   - *(a) $\ln(x) = 0$;*
   - *(b) $\ln(x^2) = 5$;*
   - *(c) $\ln(x^2 - 1) = \ln(3)$.*

Graphiquement, le fait que les fonctions exponentielle et logarithme se complètent se traduit par le fait que leurs courbes représentatives sont symétriques par rapport à la première bissectrice, c'est-à-dire la droite d'équation $y = x$ (voir figure 2.2).

Dérivation de la fonction logarithme

La fonction ln est dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$ et sa dérivée est donnée, pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$, par :

$$\ln'(x) = \frac{1}{x}.$$

Plus généralement, on a la proposition suivante :

Proposition 4.2.7. *Soit $f : I \to \mathbf{R}_+^*$ une fonction dérivable sur un intervalle $I \subset \mathbf{R}$ et à valeurs strictement positives. Alors la fonction $x \mapsto \ln(f(x))$ est dérivable sur I et, pour tout $x \in I$, on a : $(\ln(f(x)))' = \frac{f'(x)}{f(x)}$.*

Exemple 4.2.8. 1. Considérons le cas où $I = \mathbf{R}$ et $f(x) = x^2 + 1$ (qui est bien strictement positif). La dérivée de la fonction définie par $\ln(x^2 + 1)$ pour tout $x \in \mathbf{R}$ est donnée par :

$$(\ln(x^2+1))' = \frac{(x^2+1)'}{x^2+1} = \frac{2x}{x^2+1}.$$

2. Considérons le cas où $I = \mathbf{R}$ et $f(x) = x^4 + 3x^2 + 2$ (qui est bien strictement positive). La dérivée de la fonction définie par $\ln(x^4 + 3x^2 + 2)$ pour tout $x \in \mathbf{R}$ est donnée par :

$$(\ln(x^4+3x^2+2))' = \frac{(x^4+3x^2+2)}{x^4+3x^2+2} = \frac{4x^3+6x}{x^4+3x^2+2}.$$

Fonction logarithme en base a

Définition 4.2.9. *Soit $a > 0$ un nombre réel strictement positif. On appelle* ***fonction logarithme en base*** *a, la fonction, notée $\log_a$ et définie par :*

$$\log_a(x) := \frac{\ln(x)}{\ln(a)}.$$

La notion précédente généralise la notion de fonction logarithme. En effet, la fonction logarithme népérien est le cas particulier d'une fonction logarithme en base a où $a = e$. En d'autres termes $\ln = \log_e$.

Par ailleurs, lorsque $a = 10$, il est d'usage de noter plus simplement la fonction $\log_{10}$ sous la forme $\log_{10} = \log$. On parle alors de **logarithme décimal**. En particulier, si $x = 10^b$, on a $\log(x) = b$. En d'autres termes, le logarithme décimal d'un nombre fournit le nombre de chiffre "précédant la virgule" si le nombre est supérieur à 1.

Exemple 4.2.10.
1. $\log_{10}(100) = 2$.
2. $\log_{10}(1000) = 3$.
3. $\log_{10}(1000000) = 6$.

4.3 Fonctions trigonométriques

Définitions et premières propriétés

Définition 4.3.1. *Considérons un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan et désignons par $C(0,1)$ le cercle (trigonométrique) de centre 0 et de rayon 1. Soit x un nombre réel et M le point du cercle $C(0,1)$ tel que la mesure de l'angle $(\overrightarrow{OM}, \vec{i})$ soit égale à x. On désigne respectivement par H et K les projetés orthogonaux de M sur l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées respectivement. On appelle :*
- $\cos(x)$ *l'abscisse du point M, c'est-à-dire* $\cos(x) = \frac{OH}{OM}$;
- $\sin(x)$ *l'ordonnée du point M, c'est-à-dire* $\sin(x) = \frac{OK}{OM}$.

Remarque 4.3.2.
1. Pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a $\cos(x) \in [-1, 1]$ et $\sin(x) \in [-1, 1]$.
2. Pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$.
3. On a les valeurs particulières suivantes :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0

Définition 4.3.3.
1. *La fonction qui, à tout nombre $x \in \mathbf{R}$, associée* $\cos(x)$ *s'appelle la fonction cosinus et est notée* $\cos$.
2. *La fonction qui, à tout nombre $x \in \mathbf{R}$, associée* $\sin(x)$ *s'appelle la fonction cosinus et est notée* $\sin$.

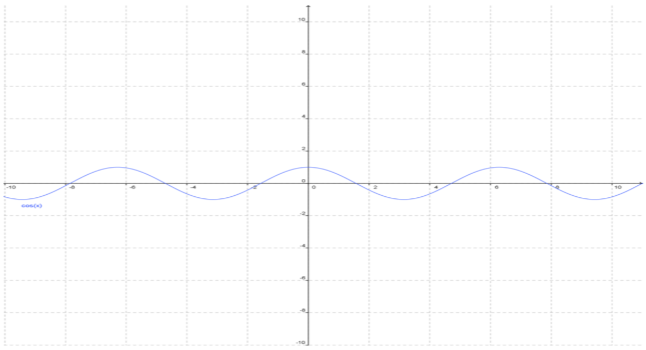

FIGURE 4.3 – Courbe représentative de la fonction sinus

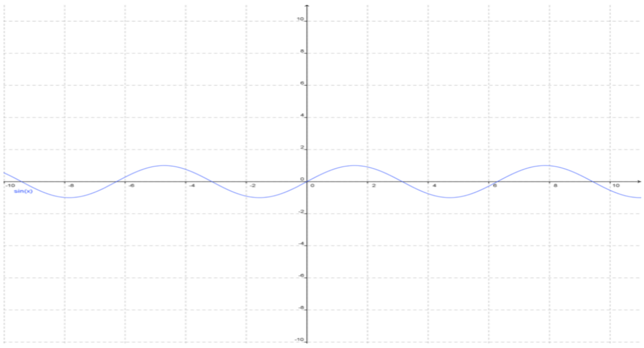

FIGURE 4.4 – Courbe représentative de la fonction sinus

Les courbes représentatives des fonctions cos et sin sont fournies dans les figures 4.3 et 4.4. Il existe, dans le même esprit que pour la fonction exponentielle, des formules de $\cos(x + y)$, $\sin(x + y)$. Ces dernières ne sont pas présentées dans ce cours. Ci-dessous, nous énonçons deux propriétés portant sur les fonctions cos et sin : la parité/imparité et la périodicité.

Parité/Imparité

Proposition 4.3.4.

1. *La fonction* cos *est paire : en d'autres termes,* $\cos(-x) = \cos(x)$ *pour tout* x*.*
2. *La fonction* sin *est impaire : en d'autres termes,* $\sin(-x) = -\sin(x)$ *pour tout* x*.*

Graphiquement, le fait que cos est paire se traduit par le fait que l'axe des ordonnées est un axe de symétrie de la courbe (figure 4.3). Le fait que sin est impaire se traduit par le fait que l'origine est un point de symétrie de la courbe (figure 4.4).

Périodicité

Proposition 4.3.5. *Les fonctions* cos *et* sin *sont périodiques de période* 2π *: en d'autres termes, pour tout* x*, on a :*

$$\cos(x + 2\pi) = \cos(x) \quad et \quad \sin(x + 2\pi) = \sin(x).$$

Graphiquement, le fait que cos et sin soient périodiques se traduit par le fait que les graphes de ces deux fonctions sont des motifs définis sur $[-\pi, \pi]$ que "l'on reproduit, indéfiniment, en faisant des translations horizontales de 2π" (figures 4.3 et 4.4). En particulier, il suffit d'étudier les fonctions cos et sin sur un intervalle de longueur 2π.

Dérivation des fonctions cosinus et sinus

Les fonctions cos et sin sont dérivables sur $\mathbf{R}$ de dérivées :

$$\cos'(x) = -\sin(x) \quad \text{et} \quad \sin'(x) = +\cos(x).$$

Plus généralement, on a la proposition suivante :

Proposition 4.3.6. *Soit $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction dérivable sur un intervalle $I \subset \mathbf{R}$. Alors les fonctions $x \mapsto \cos(f(x))$ et $x \mapsto \sin(f(x))$ sont dérivables sur I et, pour tout $x \in I$, on a :*

$$(\cos(f(x)))' = -\sin(f(x)) \times f'(x) \quad \textit{et} \quad (\sin(f(x)))' = +\cos(f(x)) \times f'(x).$$

Exemple 4.3.7.

1. Considérons le cas où $I = \mathbf{R}$ et $f(x) = x^2$. La dérivée de la fonction définie par $\cos(x^2)$ pour tout $x \in \mathbf{R}$ est donnée par :

$$(\cos(x^2))' = -\sin(x^2) \times (x^2)' = -2x\sin(x^2).$$

2. Considérons le cas où $I = \mathbf{R}$ et $f(x) = x^3 + 2x$. La dérivée de la fonction définie par $\sin(x^3 + 2x)$ pour tout $x \in \mathbf{R}$ est donnée par :

$$(\sin(x^3 + 2x))' = +\cos(x^3 + 2x) \times (x^3 + 2x)' = (3x^2 + 2)\cos(x^3 + 2x).$$

Chapitre 5

Intégration

Sommaire

5.1 Aire et Intégrale

Dans tout ce chapitre, on considère une fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ continue sur un intervalle fermé $I = [a, b] \subset \mathbf{R}$.

Définition 5.1.1. *Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}_+$ une fonction continue et positive sur un intervalle $I = [a, b]$. On appelle intégrale de f sur l'intervalle $[a, b]$ l'aire de la surface S délimitée :*
- *à gauche par a et à droite par b ;*
- *au-dessus par la courbe de f et en-dessous par l'axe des abscisses.*

On désigne cette quantité par $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$. En d'autres termes

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x := \mathcal{A}(S).$$

Exemple 5.1.2.
1. Considérons le cas où $a = 0$, $b = 1$ et $f(x) = 1$ sur l'intervalle $[0, 1]$. Alors, la surface S est un carré et l'on a : $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \mathrm{d}x = 1$.
2. Considérons le cas où $a = 0$, $b = 3$ et $f(x) = 2 + x$ sur l'intervalle $[0, 3]$. Alors, la surface S est un trapèze et l'on a : $\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^3 (2 + x)\mathrm{d}x = 6 + \frac{9}{2} = \frac{21}{2}$.
3. Considérons le cas où $a = 0$, $b = 2$ et $f(x) = t^2$ sur l'intervalle $[0, 2]$. Alors, la surface S est la portion du plan qui se situe sous la parabole et compris entre les droites $x = 0$ et $x = 2$. On peut alors montrer que $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^2 x^2\mathrm{d}x = \frac{8}{3}$.

Lorsque la surface S est compliquée, il faut décomposer S en des surfaces plus simples, dont les aires sont facilement calculables.
- Pour un trapèze, par exemple, on peut décomposer le trapèze en un triangle et un rectangle ;

- Pour l'aire de la surface associée à la parabole t^2, on décompose la surface en une somme "infinie" de rectangles.

Lorsque la fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ n'est pas positive, on peut étendre la notion d'intégrale dans le même esprit. Plus précisément, l'intégrale $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ se définit de la même façon mais l'aire de la surface est :

- positive si la surface se situe au-dessus de l'axe des abscisses ;
- négative si la surface se situe en-dessous de l'axe des abscisses.

Remarque 5.1.3.

1. Si f est continue sur un intervalle $[a, b]$ et si $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in [a, b]$, alors $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geq 0$.
2. Si f est continue sur un intervalle $[a, b]$ et si $f(x) \leq 0$ pour tout $x \in [a, b]$, alors $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq 0$.

Exemple 5.1.4. Considérons le cas où $a = -1$, $b = 1$ et $f(x) = x$ sur l'intervalle $[-1, 1]$. Alors $\int_{-1}^1 f(x)\mathrm{d}x = \int_{-1}^1 x\mathrm{d}x = 0$.

Remarque 5.1.5.

1. On dit que x est une variable muette, au même titre que l'indice i d'une somme $\sum_i$ indexée par i. En particulier, on peut utiliser n'importe quelle autre lettre pour désigner la variable d'intégration, c'est-à-dire :
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f(s)\mathrm{d}s = \cdots$$
2. La notation "dx" a pour origine la largeur des rectangles qui ont été utilisés dans les premiers calculs d'approximation, cette largeur multipliant les valeurs prises par la fonction.

Proposition 5.1.6. *(Relation de Chasles). Soient a, b et c trois nombres réels tels que $a \leq c \leq b$ et soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$. Alors*
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x.$$

Proposition 5.1.7. *(Linéarité de l'intégrale). Soient a, b, α et β quatre nombres réels tels que $a \leq b$ et soient f et g deux fonctions continues sur l'intervalle $[a, b]$. Alors*
$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\mathrm{d}x = \alpha \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \beta \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

5.2 Primitives

Dans cette section, on introduit la notion de primitives. Cette notion fournira un procédé pratique pour calculer des intégrales.

Définition 5.2.1. *Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$. On appelle primitive de la fonction f toute fonction dérivable F telle que $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in [a, b]$.*

Exemple 5.2.2.

1. Considérons le cas où $f(x) = 3x^2 - x$. Alors les fonctions définies par $F_1(x) = x^3 - \frac{1}{2}x^2$ et $F_2(x) = x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2$ sont des primitives de f.
2. Considérons le cas où $f(x) = x^3 + \sin(x)$. Alors les fonctions définies par $F_1(x) = \frac{1}{4}x^4 - \cos(x)$ et $F_2(x) = \frac{1}{4}x^4 - \cos(x) + 8$ sont des primitives de f.

Pour calculer les primitives, le procédé est analogue à celui de la dérivation : on décompose une fonction f en des fonctions usuelles ; on détermine les primitives de ces fonctions usuelles et on en déduit les primitives de la fonction f en effectuant des opérations algébriques.

Primitives de fonctions usuelles

Fonction	Primitive	Domaine d'intégration
$f(x) = x^n$	$F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$	$\mathbf{R}$ $(n \in \mathbf{N})$
$f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$F(x) = \sqrt{x} + c$	$\mathbf{R}_+^*$
$f(x) = -\frac{1}{x^2}$	$F(x) = \frac{1}{x} + c$	$\mathbf{R}^*$
$f(x) = \exp(x)$	$F(x) = \exp(x) + c$	$\mathbf{R}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = \ln(\lvert x\rvert) + c$	$\mathbf{R}_-^*$, $\mathbf{R}_+^*$
$f(x) = \sin(x)$	$F(x) = -\cos(x) + c$	$\mathbf{R}$
$f(x) = \cos(x)$	$F(x) = \sin(x) + c$	$\mathbf{R}$

TABLE 5.1 – Primitives de fonctions usuelles

Remarque 5.2.3.
- Une fonction de la forme $f' \times f^n$, avec $n \in \mathbf{Z} \setminus \{-1\}$ a pour primitives les fonctions de la forme $\frac{1}{n+1} f^{n+1} + c$.
- Une fonction de la forme $\frac{f'}{\sqrt{f}}$ a pour primitives les fonctions de la forme $2\sqrt{f} + c$.
- Une fonction de la forme $\frac{f'}{f}$ a pour primitives les fonctions de la forme $\ln(|f|) + c$.
- Une fonction de la forme $f' \times e^f$ a pour primitives les fonctions de la forme $e^f + c$.
- Une fonction de la forme $f' \times \sin(f)$ a pour primitives les fonctions de la forme $-\cos(f) + c$.
- Une fonction de la forme $f' \times \cos(f)$ a pour primitives les fonctions de la forme $\sin(f) + c$.

Résultats généraux

Proposition 5.2.4. *Soient f et g deux fonctions continues sur un même intervalle I et de primitives F et G. Alors, pour tout $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, la fonction $\alpha f + \beta g$ possède une primitive donnée par $\alpha F + \beta G$.*

Proposition 5.2.5. *Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$, avec $a \leq b$.*

1. *La fonction $F : [a, b] \to \mathbf{R}$ définie pour tout $x \in [a, b]$ par :*
$$F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$
est une primitive de f, i.e. $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in [a, b]$.
2. *La fonction f possède une infinité de primitives sur l'intervalle $[a, b]$ et ces dernières diffèrent toutes d'une constante.*

5.3 Calculs d'intégrales à partir de primitives

Etant donnée une fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, nous avons vu que l'intégrale $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ est définie comme l'aire qui se situe entre la courbe de f, l'axe des abscisses et qui est limitée à gauche et à droite par a et b respectivement. Cette définition est cependant peu maniable sur le plan pratique. La proposition suivante remédie à ce problème.

Proposition 5.3.1. *Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$ et soit F une primitive. Alors*

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b := F(b) - F(a).$$

Remarque 5.3.2.
1. Si G est une autre primitive de f, on a également $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = G(b) - G(a)$. L'intégrale semble donc dépendre du choix de la primitive : c'est-à-dire de F ou de G. En fait, le calcul de l'intégrale est bien indépendant du choix de la primitive car on a $F(b) - F(a) = G(b) - G(a)$ pour toute primitives F et G étant données que les fonctions F et G diffèrent seulement d'une constante d'après la remarque.
2. En particulier, pour calculer une intégrale, il suffit de choisir une et une seule primitive de la fonction f. Il est d'usage de considérer celle qui s'annule en 0 pour éviter de manipuler des constantes.

Exemple 5.3.3. On souhaite calculer l'intégrale $\int_0^1 (x^2+3x)\mathrm{d}x$: celle-ci a bien un sens puisque la fonction f définie $f(x) = x^2 + 3x$ est continue sur l'intervalle $[0,1]$. L'unique primitive de la fonction f, valant 0 en 0, est donnée par $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2$. En particulier,

$$\int_0^1 (x^2+3x)\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2\right]_0^1 = \left(\frac{1}{3}\times 1^3 + \frac{3}{2}\times 1^2\right) - \left(\frac{1}{3}\times 0^3 + \frac{3}{2}\times 0^2\right) = \frac{3}{2}.$$

Exemple 5.3.4. On souhaite calculer l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x)\mathrm{d}x$. Pour déterminer une primitive de la fonction $x \mapsto \cos^2(x)$, l'idée est de "linéariser" le $\cos^2$. Plus précisément, en utilisant des formules usuelles de trigonométrie, on sait que $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$. En particulier, on a $\cos^2(x) = \frac{1}{2} + \frac{\cos(2x)}{2}$. L'unique primitive de la fonction $\cos^2$, valant 0 en 0, est donc donnée par $F(x) = \frac{x}{2} + \frac{\sin(2x)}{4}$. On obtient donc :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos(2x)}{2}\mathrm{d}x = \left[\frac{x}{2} + \frac{\sin(2x)}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}.$$

5.4 Formules d'intégration

Dans cette section, on fournit deux méthodes pratiques pour calculer des intégrales.

Théorème 5.4.1. *(Intégration par parties) Soient f et g deux fonctions dérivables, de dérivées continues, sur un intervalle $[a,b]$ avec $a \leq b$. Alors*

$$\int_a^b f(x)g'(x)\mathrm{d}x = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\mathrm{d}x.$$

Exemple 5.4.2. On souhaite calculer l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos(x)\mathrm{d}x$. Pour cela, on effectue une intégration par parties en posant $f(x) = x$ et $g(x) = \cos(x)$. Cela donne :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin(x)\mathrm{d}x = [x\sin(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} - [-\cos(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1.$$

Théorème 5.4.3. *(Changement de variables) Soit $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction continue sur un intervalle I et soit ϕ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ (i.e. dérivable et de dérivée continue) sur un intervalle $[a, b]$ et telle que $\phi([a, b]) \subset I$. Alors*

$$\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(\phi(t))\phi'(t)\mathrm{d}t.$$

Remarque 5.4.4. Informellement, l'idée du changement de variables est de poser $x = \phi(t)$. En particulier, $\mathrm{d}x = \phi'(t)\mathrm{d}t$. En remplaçant x par $\phi(t)$ et $\mathrm{d}x$ par $\phi'(t)\mathrm{d}t$ dans l'intégrale, on obtient alors que $\int f(x)\mathrm{d}x = \int f(\phi(t))\phi'(t)\mathrm{d}t$.

Exemple 5.4.5. On souhaite calculer l'intégrale suivante : $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$. Pour cela, on considère le changement de variables $x = \sin(t)$. Plus précisément, on pose $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ et

$$\begin{aligned} \phi : \left[0, \frac{\pi}{2}\right[&\to [0, 1] \\ t &\mapsto \sin(t). \end{aligned}$$

La fonction ϕ est dérivable de dérivée $\phi'(t) = \cos(t)$. Concernant les bornes d'intégration, on prend $\phi(a) = 0$, $\phi(b) = 1$, $a = 0$ et $b = \frac{\pi}{2}$. En appliquant le théorème de changement de variables, on obtient :

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2(t)} \times \cos(t)\mathrm{d}t.$$

En remarquant que $1 - \sin^2(t) = \cos^2(t)$ et donc que $\sqrt{1-\sin^2(t)} = |\cos(t)|$, on en déduit que :

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos(t)| \times \cos(t)\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos(t)| \times \cos(t)\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4}.$$