COURS DE MATHEMATIQUES (MAT11)

EILCO

Cycle Préparatoire, $1^{\text{ère}}$ année

Semestre 1

N. CHENAVIER

Table des matières

1 Dérivation **5**
- 1.1 Dérivée d'une fonction 5
- 1.2 Utilisations de la dérivation 8
- 1.3 Dérivée d'une application réciproque 9

2 Calcul intégral **13**
- 2.1 Aire et Intégrale 13
- 2.2 Primitives 14
- 2.3 Calculs d'intégrales à partir de primitives 16
- 2.4 Formules d'intégration 16

3 Equations différentielles **19**
- 3.1 Généralités 19
- 3.2 Equation différentielle linéaire du premier ordre 19
- 3.3 Equation différentielle linéaire du second ordre 21

4 Géométrie euclidienne **23**
- 4.1 Géométrie dans le plan 23
- 4.2 Géométrie dans l'espace 26
- 4.3 Complément de trigonométrie 29

5 Nombres complexes **31**
- 5.1 Forme algébrique d'un nombre complexe 31
- 5.2 Forme trigonométrique d'un nombre complexe 32
- 5.3 Nombres complexes et géométrie 34
- 5.4 Equations algébriques 34
- 5.5 Applications à la trigonométrie 36

Chapitre 1

Dérivation

Sommaire

1.1 Dérivée d'une fonction 5
1.2 Utilisations de la dérivation 8
1.3 Dérivée d'une application réciproque 9

1.1 Dérivée d'une fonction

Définition 1.1.1. *Une fonction (réelle d'une variable réelle) $f : E \to F$ est une relation entre deux sous-ensembles E et F de $\mathbf{R}$ pour laquelle à chaque élément de E (appelé ensemble de départ) est associé au plus un élément de F (appelé ensemble d'arrivée). L'ensemble D_f des réels $x \in E$ tels que $f(x)$ existe s'appelle le domaine de définition de f.*

Remarque 1.1.2. Pour déterminer un domaine de définition, on fera notamment attention au trois problèmes suivants :
- annulation du dénominateur : si $f(x) = \frac{x+1}{x^2-4}$, alors $D_f = \mathbf{R} \setminus \{-2, 2\}$;
- positivité sous la racine : si $f(x) = \sqrt{4-2x}$, alors $D_f =]-\infty, 2]$;
- stricte positivité sous un ln : si $f(x) = \ln(x^2-9)$, alors $D_f =]-\infty, -3[\cup]3, +\infty[$.

En pratique, les domaines définitions que nous considérerons seront des intervalles ou des réunions d'intervalles. Dans la suite, nous nous limitons au cas où la fonction f est définie sur un intervalle I de $\mathbf{R}$.

Définition 1.1.3. *Soit $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction définie sur un intervalle I. On dit que f est dérivable en un point $x_0 \in I$ si le taux d'accroissement $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ admet une limite finie quand h tend vers 0. On appelle dérivée de f en x_0 la valeur de cette limite :*

$$f'(x_0) := \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}.$$

Graphiquement, une fonction est dérivable en un point x_0 si la courbe représentative de la fonction est "lisse" au voisinage de x_0. Dans ce cas, cette courbe admet une tangente.

Remarque 1.1.4. 1. Si f est dérivable en x_0, alors f est continue en x_0.

2. Si f est dérivable en x_0, alors la courbe représentative de f admet une tangente en x_0 et son équation est donnée par $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

Les fonctions non dérivables en un point x_0 que nous rencontrerons seront de trois types :
- les fonctions non continues en x_0 : si $f(x) = \frac{1}{x}$ pour tout $x \in \mathbf{R}^*$ et $f(0) = 0$, alors f n'est pas continue et donc pas dérivable en 0 ;
- les fonctions admettant une tangente verticale en x_0 : si $f(x) = \sqrt{x}$ pour tout $x \in \mathbf{R}_+$, alors f n'est pas dérivable en 0 ;
- les fonctions admettant un point singulier en x_0 : si $f(x) = |x|$ pour tout $x \in \mathbf{R}$, alors f n'est pas dérivable en 0.

Définition 1.1.5. *Soit $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction définie sur un intervalle I.*

1. *On dit que f est dérivable sur I si f est dérivable en tout point de I.*
2. *Si f est dérivable sur I, on appelle dérivée de f la fonction $f' : I \to \mathbf{R}, x \mapsto f'(x)$.*

Exemple 1.1.6. Si f désigne la fonction définie par $f(x) = x^4 - 3x^2 + 2x$, alors f est dérivable sur $\mathbf{R}$ et sa dérivée est donnée par $f'(x) = 4x^3 - 6x + 2$.

En pratique, pour étudier la dérivabilité et calculer la dérivée d'une fonction, on commence par étudier la dérivabilité d'un point de vue "global" et on calcule la dérivée à partir de théorèmes généraux (dérivées de fonctions usuelles, opérations sur les dérivées). Si nécessaire, on étudie également la dérivabilité d'un point de vue "local" en d'éventuels points à partir du taux d'accroissement.

Dérivées de fonctions usuelles

Le tableau suivant rassemble les dérivées connues de diverses fonctions usuelles.

$f(x)$	$f'(x)$	I
x^n	nx^{n-1}	$\mathbf{R}$ $(n \in \mathbf{N})$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbf{R}_+^*$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\mathbf{R}_-^*$, $\mathbf{R}_+^*$
$\exp(x)$	$\exp(x)$	$\mathbf{R}$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$	$\mathbf{R}_+^*$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$\mathbf{R}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\mathbf{R}$

TABLE 1.1 – Dérivées de fonctions usuelles

Opérations algébriques

Les propriétés suivantes fournissent une méthode pratique pour calculer la dérivée d'une fonction à partir des dérivées des fonctions usuelles.

Sommes, produits et quotients

Proposition 1.1.7. *1. Soit $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction dérivable sur un intervalle I et soit c un nombre réel. Alors, pour tout $x \in I$, on a :*

$$(f+c)'(x) = f'(x), \quad (c \cdot f)'(x) = c \cdot f'(x).$$

2. Soient f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle I. Alors, pour tout $x \in I$, on a :

$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x), \quad (f \times g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

De plus, si $g(x) \neq 0$, on a :

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}.$$

Composées

Définition 1.1.8. *Soient $f : I \to J$ et $g : J \to \mathbf{R}$ deux fonctions définies respectivement sur des intervalles I et J. On appelle composée de g et de f la fonction notée $g \circ f : I \to \mathbf{R}$ définie par $g \circ f(x) = g(f(x))$ pour tout $x \in I$.*

Proposition 1.1.9. *Soient $f : I \to J$ et $g : J \to \mathbf{R}$ deux fonctions dérivables sur des intervalles I et J respectivement. Alors $g \circ f$ est dérivable et, pour tout $x \in I$, on a :*

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \times f'(x).$$

Par abus de notations, on écrira ci-dessous $(g(f(x)))' := (g \circ f)'(x)$. En d'autres termes, la dérivée de la fonction $x \mapsto g(f(x))$ est donnée par $(g(f(x)))' = g'(f(x)) \times f'(x)$.

Remarque 1.1.10. On obtient les cas particuliers suivants :

1. Si $f : I \to \mathbf{R}_+^*$ est dérivable sur I, la fonction $x \mapsto \sqrt{f(x)}$ est dérivable sur I et $(\sqrt{f(x)})' = \frac{1}{2\sqrt{f(x)}} \times f'(x)$.
2. Si $f : I \to \mathbf{R}$ est dérivable sur I, la fonction $x \mapsto \exp(f(x))$ est dérivable sur I et $(\exp(f(x)))' = \exp(f(x)) \times f'(x)$.
3. Si $f : I \to \mathbf{R}_+^*$ est dérivable sur I, la fonction $x \mapsto \ln(f(x))$ est dérivable sur I et $(\ln(f(x)))' = \frac{f'(x)}{f(x)}$.
4. Si $f : I \to \mathbf{R}$ est dérivable sur I, la fonction $x \mapsto \cos(f(x))$ est dérivable sur I et $(\cos(f(x)))' = -\sin(f(x)) \times f'(x)$.
5. Si $f : I \to \mathbf{R}$ est dérivable sur I, la fonction $x \mapsto \sin(f(x))$ est dérivable sur I et $(\sin(f(x)))' = \cos(f(x)) \times f'(x)$.

Exercice 1.1.11. *Quelles sont les expressions des dérivées de $\frac{1}{f(x)}$ et $(f(x))^5$?*

Exemple 1.1.12. Soit $f : \mathbf{R} \to [0,1], x \mapsto \sin(x^2)$. Alors f est dérivable sur $\mathbf{R}$ est sa dérivée est donnée par $f'(x) = (\sin(x^2))' = \cos(x^2) \times (x^2)' = 2x\cos(x^2)$.

Exemple 1.1.13. Soit $f : \mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}_+^*, x \mapsto x^\alpha$, où $\alpha \in \mathbf{R}$. La fonction f s'écrit sous la forme suivante :

$$x^\alpha = \exp(\alpha \ln(x)).$$

D'après la proposition ci-dessus, la fonction f est dérivable sur l'intervalle $\mathbf{R}_+^*$ et sa dérivée est donnée par $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$.

1.2 Utilisations de la dérivation

Dans cette section, on fournit deux utilisations de la notion de dérivation pour étudier une fonction.

Sens de variations

Le théorème suivant est une conséquence d'un résultat fondamental d'analyse réelle (théorème de Rolle) et sera démontré en cours d'Analyse (MAT12). Il fournit une méthode pratique pour déterminer le sens de variations d'une fonction dérivable.

Théorème 1.2.1. *Soit $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction dérivable sur un intervalle I. Alors :*

1. *f est croissante sur I si et seulement si, pour tout $x \in I$, on a $f'(x) \geq 0$;*
2. *f est décroissante sur I si et seulement si, pour tout $x \in I$, on a $f'(x) \leq 0$;*
3. *f est constante sur I si et seulement si, pour tout $x \in I$, on a $f'(x) = 0$.*

Remarque 1.2.2. Si f et g sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I telles que $f'(x) = g'(x)$ pour tout $x \in I$ et $f(x_0) = g(x_0)$ pour un certain $x_0 \in I$, alors $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in I$.

Le théorème suivant traite des fonctions strictement monotones.

Théorème 1.2.3. *Soit $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction dérivable sur un intervalle I.*

1. *si, pour tout $x \in I$, on a $f'(x) > 0$ alors f est strictement croissante ;*
2. *si, pour tout $x \in I$, on a $f'(x) < 0$ alors f est strictement décroissante.*

Remarque 1.2.4. La réciproque du théorème ci-dessus n'est pas vraie : il existe des fonctions strictement monotones dont la dérivée peut s'annuler. Par exemple, la fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, x \mapsto x^3$ est strictement croissante mais sa dérivée s'annule en 0.

Recherche d'extremums

Définition 1.2.5. *Soit $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction définie sur un intervalle I.*

1. *On dit que f possède un maximum M sur I s'il existe $x_0 \in I$ tel que $f(x_0) = M$ et si, pour tout $x \in I$, on a : $f(x) \leq M$;*
2. *On dit que f possède un minimum m sur I s'il existe $x_0 \in I$ tel que $f(x_0) = m$ et si, pour tout $x \in I$, on a : $f(x) \geq m$.*

On parle d'extremum d'une fonction pour désigner indifféremment son maximum ou/et son minimum (s'ils existent). La proposition suivante donne une condition nécessaire (mais pas suffisante) pour qu'un point réalise le maximum ou le minimum d'une fonction.

Proposition 1.2.6. *Soit $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction dérivable sur un intervalle I ouvert. Supposons que f atteigne son maximum (respectivement son minimum) en un point $x_0 \in I$. Alors $f'(x_0) = 0$.*

Graphiquement, le fait que la dérivée s'annule en le maximum ou le minimum se traduit par le fait que la courbe admet une tangente horizontale en x_0. Par ailleurs, la réciproque de la proposition précédente n'est pas vraie : si $f'(x_0) = 0$, cela n'implique pas que f atteigne son maximum ou son minimum en x_0. En effet, si $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est définie par $f(x) = x^3$, on a $f'(0) = 0$ sans que f ne possède de maximum ni de minimum en 0.

Il existe cependant une "sorte de réciproque" de la proposition 1.2.6 en ajoutant une hypothèse sur la dérivée de la fonction. La notion sous-jacente est celle d'extremum local.

Définition 1.2.7. *Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction. On dit que f possède un extremum local en x_0 (respectivement maximum local ou minimum local) s'il existe un intervalle sur lequel x_0 est un extremum de f (respectivement un maximum ou un minimum).*

Exemple 1.2.8.

1. La fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, x \mapsto x^2 + 1$ possède un minimum local en 0, qui est aussi un minimum (global) de f sur $\mathbf{R}$.
2. La fonction $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, x \mapsto x^3 - 3x$ possède un maximum local (mais non global) en -1 et un minimum local (mais non global) en 1.

Proposition 1.2.9. *Soit $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur un intervalle I ouvert (c'est-à-dire telle que f'' existe et est continue). Soit $x_0 \in I$ tel que $f'(x_0) = 0$.*

1. *Si $f''(x_0) > 0$, alors f possède un minimum local en x_0.*
2. *Si $f''(x_0) < 0$, alors f possède un maximum local en x_0.*

Exemple 1.2.10. La proposition ci-dessus permet de retrouver le fait que la fonction $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, x \mapsto x^3 - 3x$ possède un maximum local en -1 et un minimum local en 1.

Remarque 1.2.11.

1. Si $f''(x_0) = 0$, on ne peut pas conclure en général.
2. Cependant, si $f''(x_0) = 0$ et que f'' change de signe de part et d'autre de x_0, on dit que x_0 est un point d'inflexion. Graphiquement, cela se traduit par le fait que la courbe "traverse" la tangente en x_0 : la courbe passe alors d'une allure concave à une allure convexe (ou réciproquement). C'est le cas, notamment, de la fonction $x \mapsto x^3$.

1.3 Dérivée d'une application réciproque

Dans cette section, on présentera un résultat pratique pour calculer la dérivée d'une application réciproque. La notion d'application réciproque ne concerne qu'un certain type de fonctions, appelées bijections, que l'on introduit ci-dessous.

Bijections et applications réciproques

Définition 1.3.1. *Une application est une fonction $f : E \to F$ telle que chaque élément de l'espace de départ E possède une image dans l'espace d'arrivée F.*

Exemple 1.3.2.

1. $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ x \mapsto \frac{1}{(x+1)(x-2)}$ est une fonction mais pas une application.
2. $f : \mathbf{R} \setminus \{-1, 2\} \to \mathbf{R},\ x \mapsto \frac{1}{(x+1)(x-2)}$ est une application.

Définition 1.3.3. *Une application f, définie sur un sous-ensemble E de $\mathbf{R}$, et prenant ses valeurs dans un sous-ensemble F de $\mathbf{R}$ est appelée bijection de E sur F si tout élement de F admet par f un unique antécédant dans E.*

Exemple 1.3.4.

1. Les applications $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, x \mapsto x^3$ et $\exp : \mathbf{R} \to \mathbf{R}_+^*$ sont des bijections.
2. Les applications $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}_+, x \mapsto x^2$ et $g : \mathbf{R}^* \to \mathbf{R}, x \mapsto \frac{1}{x}$ ne sont pas des bijections.
3. L'application $\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$ est une bijection mais $\cos : \mathbf{R} \to [-1, 1]$ n'est pas une bijection.

Définition 1.3.5. *Soit f une bijection de E sur F. On appelle application réciproque de f la bijection notée f^{-1} définie sur F, à valeurs dans E, et qui associe à tout élément de F son unique antécédant dans E.*

Remarque 1.3.6. 1. Pour tout $x \in E$, on a $f^{-1} \circ f(x) = x$ et pour tout $y \in F$, on a $f \circ f^{-1}(y) = y$.

2. Pour calculer $f^{-1}(y)$, il faut trouver la valeur de x pour laquelle $y = f(x)$.
3. La courbe représentative de f^{-1} est le symétrique de la courbe représentative de f par la première bissectrice.

Exemple 1.3.7. 1. La bijection réciproque de $f : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+, x \mapsto \sqrt{x}$ est $f^{-1} : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+, y \mapsto y^2$.

2. La bijection réciproque de $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, x \mapsto x^3$ est $f^{-1} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, y \mapsto \sqrt[3]{y}$.
3. La bijection réciproque de $\exp : \mathbf{R} \to \mathbf{R}_+^*$ est $\ln : \mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}$.

Théorème de la bijection

Définition 1.3.8. *Soit $f : E \to F$ une application. On appelle ensemble image de E par f l'ensemble suivant :*

$$f(E) := \{f(x) : x \in E\}.$$

Exemple 1.3.9. 1. L'image de l'application $f : [-2, 2] \to \mathbf{R}, x \mapsto x^3$ est égale à $f([-2, 2]) = [-8, 8]$.

2. L'image de l'application $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, x \mapsto x^2 + 1$ est égale à $g(\mathbf{R}) = [1, +\infty[$.
3. L'image de l'application $\cos : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est égale à $\cos(\mathbf{R}) = [-1, 1]$.

Théorème 1.3.10. *(théorème de la bijection) Soit f une application continue et strictement monotone sur un intervalle I, d'extrémités a et b finis ou infinis. L'image $f(I)$ de I par f est un intervalle de même nature que I (ouvert, fermé, semi-ouvert), d'extrémités $\lim_a f$ et $\lim_b f$. De plus, f est une bijection de I sur son image $f(I)$.*

Exemple 1.3.11. La fonction $f : [-2, 2] \to \mathbf{R}, x \mapsto x^3$ étant bien strictement monotone, on retrouve bien le fait que $f([-2, 2]) = [-8, 8] = [f(-2), f(2)]$.

Remarque 1.3.12. 1. L'hypothèse de stricte monotonie est nécessaire. Par exemple, si f est la fonction $f : [-1, 2] \to \mathbf{R}, x \mapsto x^2$, on a $f([-1, 2]) = [0, 4] \neq [f(-1), f(2)]$.

2. En pratique, pour montrer que l'hypothèse de stricte monotonie d'une fonction dérivable est satisfaite dans le théorème 1.3.10, on montre que la dérivée de la fonction ne s'annule pas et est de signe constant.

Dérivée de l'application réciproque

Théorème 1.3.13. *Soit $f : I \to J$ une bijection d'un intervalle I sur un intervalle J et x_0 un élément de I. Si f est dérivable en x_0 et si $f'(x_0) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en $y_0 = f(x_0)$ et*

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

Remarque 1.3.14. Si la bijection $f : I \to J$ est dérivable en x_0 et si $f'(x_0) = 0$, alors f^{-1} n'est pas dérivable en $y_0 = f(x_0)$ et sa représentation graphique présente au point d'abscisse y_0 une tangente parallèle à l'axe des ordonnées.

Exemple 1.3.15. 1. Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, x \mapsto x^3 + x + 1$. On souhaite calculer $(f^{-1})'(1)$. Déjà, f^{-1} existe puisque f est bijective : il s'agit d'une conséquence du théorème de la bijection et du fait que la dérivée de f est strictement positive (puisque $f'(x) = 3x^2+1 > 0$). Posons $x_0 := f^{-1}(1)$. D'après le théorème 1.3.13, on obtient que :

$$(f^{-1})'(1) = \frac{1}{3x_0^2 + 1}.$$

Pour calculer x_0, on remarque que

$$x = f^{-1}(1) \iff f(x) = 1 \iff x^3 + x + 1 = 1 \iff x = 0.$$

On a donc $x_0 = 0$, ce qui donne $(f^{-1})'(1) = \frac{1}{3\times 0^2+1} = 1$.

2. Si $f : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+, x' \to x^2$, on retrouve en utilisant le fait que $(x^2)' = 2x$ la formule bien connue $(\sqrt{y})' = \frac{1}{2\sqrt{y}}$.

L'intérêt du théorème 1.3.13 est qu'il permet de calculer la dérivée de la fonction réciproque en un point sans qu'il soit nécessaire de calculer entièrement la fonction réciproque.

Chapitre 2

Calcul intégral

Sommaire

2.1 Aire et Intégrale **13**
2.2 Primitives **14**
2.3 Calculs d'intégrales à partir de primitives **16**
2.4 Formules d'intégration **16**

2.1 Aire et Intégrale

Dans tout ce chapitre, on considère une fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ continue sur un intervalle fermé $I = [a, b] \subset \mathbf{R}$.

Définition 2.1.1. *Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}_+$ une fonction continue et positive sur un intervalle $I = [a, b]$. On appelle intégrale de f sur l'intervalle $[a, b]$ l'aire de la surface S délimitée :*

- *à gauche par a et à droite par b ;*
- *au-dessus par la courbe de f et en-dessous par l'axe des abscisses.*

On désigne cette quantité par $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$. En d'autres termes

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x := \mathcal{A}(S).$$

Exemple 2.1.2.

1. Considérons le cas où $a = 0$, $b = 1$ et $f(x) = 1$ sur l'intervalle $[0, 1]$. Alors, la surface S est un carré et l'on a : $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \mathrm{d}x = 1$.
2. Considérons le cas où $a = 0$, $b = 3$ et $f(x) = 2 + x$ sur l'intervalle $[0, 3]$. Alors, la surface S est un trapèze et l'on a : $\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^3 (2 + x)\mathrm{d}x = 6 + \frac{9}{2} = \frac{21}{2}$.
3. Considérons le cas où $a = 0$, $b = 2$ et $f(x) = t^2$ sur l'intervalle $[0, 2]$. Alors, la surface S est la portion du plan qui se situe sous la parabole et compris entre les droites $x = 0$ et $x = 2$. On peut alors montrer que $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^2 x^2\mathrm{d}x = \frac{8}{3}$.

Lorsque la surface S est compliquée, il faut décomposer S en des surfaces plus simples, dont les aires sont facilement calculables.

- Pour un trapèze, par exemple, on peut décomposer le trapèze en un triangle et un rectangle ;

- Pour l'aire de la surface associée à la parabole t^2, on décompose la surface en une somme "infinie" de rectangles.

Lorsque la fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ n'est pas positive, on peut étendre la notion d'intégrale dans le même esprit. Plus précisément, l'intégrale $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ se définit de la même façon mais l'aire de la surface est :

- positive si la surface se situe au-dessus de l'axe des abscisses;
- négative si la surface se situe en-dessous de l'axe des abscisses.

Remarque 2.1.3. 1. Si f est continue sur un intervalle $[a, b]$ et si $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in [a, b]$, alors $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geq 0$.

2. Si f est continue sur un intervalle $[a, b]$ et si $f(x) \leq 0$ pour tout $x \in [a, b]$, alors $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq 0$.

Exemple 2.1.4. Considérons le cas où $a = -1$, $b = 1$ et $f(x) = x$ sur l'intervalle $[-1, 1]$. Alors $\int_{-1}^1 f(x)\mathrm{d}x = \int_{-1}^1 x\mathrm{d}x = 0$.

Remarque 2.1.5. 1. On dit que x est une variable muette, au même titre que l'indice i d'une somme $\sum_i$ indexée par i. En particulier, on peut utiliser n'importe quelle autre lettre pour désigner la variable d'intégration, c'est-à-dire :

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f(s)\mathrm{d}s = \cdots$$

2. La notation "$\mathrm{d}x$" a pour origine la largeur des rectangles qui ont été utilisés dans les premiers calculs d'approximation, cette largeur multipliant les valeurs prises par la fonction.

Proposition 2.1.6. *(Relation de Chasles). Soient a, b et c trois nombres réels tels que $a \leq c \leq b$ et soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$. Alors*

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x.$$

Proposition 2.1.7. *(Linéarité de l'intégrale). Soient a, b, α et β quatre nombres réels tels que $a \leq b$ et soient f et g deux fonctions continues sur l'intervalle $[a, b]$. Alors*

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\mathrm{d}x = \alpha \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \beta \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

2.2 Primitives

Dans cette section, on introduit la notion de primitives. Cette notion fournira un procédé pratique pour calculer des intégrales.

Définition 2.2.1. *Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$. On appelle primitive de la fonction f toute fonction dérivable F telle que $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in [a, b]$.*

Exemple 2.2.2. 1. Considérons le cas où $f(x) = 3x^2 - x$. Alors les fonctions définies par $F_1(x) = x^3 - \frac{1}{2}x^2$ et $F_2(x) = x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2$ sont des primitives de f.

2. Considérons le cas où $f(x) = x^3 + \sin(x)$. Alors les fonctions définies par $F_1(x) = \frac{1}{4}x^4 - \cos(x)$ et $F_2(x) = \frac{1}{4}x^4 - \cos(x) + 8$ sont des primitives de f.

Pour calculer les primitives, le procédé est analogue à celui de la dérivation : on décompose une fonction f en des fonctions usuelles; on détermine les primitives de ces fonctions usuelles et on en déduit les primitives de la fonction f en effectuant des opérations algébriques.

Primitives de fonctions usuelles

Fonction	Primitive	Domaine d'intégration
$f(x) = x^n$	$F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$	$\mathbf{R}$ $(n \in \mathbf{N})$
$f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$F(x) = \sqrt{x} + c$	$\mathbf{R}_+^*$
$f(x) = -\frac{1}{x^2}$	$F(x) = \frac{1}{x} + c$	$\mathbf{R}^*$
$f(x) = \exp(x)$	$F(x) = \exp(x) + c$	$\mathbf{R}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = \ln(\lvert x\rvert) + c$	$\mathbf{R}_-^*$, $\mathbf{R}_+^*$
$f(x) = \sin(x)$	$F(x) = -\cos(x) + c$	$\mathbf{R}$
$f(x) = \cos(x)$	$F(x) = \sin(x) + c$	$\mathbf{R}$

TABLE 2.1 – Primitives de fonctions usuelles

Remarque 2.2.3.
- Une fonction de la forme $f' \times f^n$, avec $n \in \mathbf{Z} \setminus \{-1\}$ a pour primitives les fonctions de la forme $\frac{1}{n+1} f^{n+1} + c$.
- Une fonction de la forme $\frac{f'}{\sqrt{f}}$ a pour primitives les fonctions de la forme $2\sqrt{f} + c$.
- Une fonction de la forme $\frac{f'}{f}$ a pour primitives les fonctions de la forme $\ln(|f|) + c$.
- Une fonction de la forme $f' \times e^f$ a pour primitives les fonctions de la forme $e^f + c$.
- Une fonction de la forme $f' \times \sin(f)$ a pour primitives les fonctions de la forme $-\cos(f) + c$.
- Une fonction de la forme $f' \times \cos(f)$ a pour primitives les fonctions de la forme $\sin(f) + c$.

Résultats généraux

Proposition 2.2.4. *Soient f et g deux fonctions continues sur un même intervalle I et de primitives F et G. Alors, pour tout $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, la fonction $\alpha f + \beta g$ possède une primitive donnée par $\alpha F + \beta G$.*

Remarque 2.2.5. La proposition ci-dessus n'est pas vraie si on remplace la somme par un produit : une primitive de $f \times g$ n'est pas $F \times G$. En général, pour déterminer une primitive d'un produit de fonctions, il faut utiliser la formule de dérivation d'une composée : $(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \times g'(x)$.

Proposition 2.2.6. *Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$, avec $a \leq b$.*

1. *La fonction $F : [a, b] \to \mathbf{R}$ définie pour tout $x \in [a, b]$ par :*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

   est une primitive de f, i.e. $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in [a, b]$.

2. *La fonction f possède une infinité de primitives sur l'intervalle $[a, b]$ et ces dernières diffèrent toutes d'une constante.*

2.3 Calculs d'intégrales à partir de primitives

Etant donnée une fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, nous avons vu que l'intégrale $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ est définie comme l'aire qui se situe entre la courbe de f, l'axe des abscisses et qui est limitée à gauche et à droite par a et b respectivement. Cette définition est cependant peu maniable sur le plan pratique. La proposition suivante remédie à ce problème.

Proposition 2.3.1. *Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ et soit F une primitive. Alors*

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b := F(b) - F(a).$$

Remarque 2.3.2.
1. Si G est une autre primitive de f, on a également $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = G(b) - G(a)$. L'intégrale semble donc dépendre du choix de la primitive : c'est-à-dire de F ou de G. En fait, le calcul de l'intégrale est bien indépendant du choix de la primitive car on a $F(b) - F(a) = G(b) - G(a)$ pour toute primitives F et G étant données que les fonctions F et G diffèrent seulement d'une constante d'après la remarque.
2. En particulier, pour calculer une intégrale, il suffit de choisir une et une seule primitive de la fonction f. Il est d'usage de considérer celle qui s'annule en 0 pour éviter de manipuler des constantes.

Exemple 2.3.3. On souhaite calculer l'intégrale $\int_0^1 (x^2 + 3x)\mathrm{d}x$: celle-ci a bien un sens puisque la fonction f définie $f(x) = x^2 + 3x$ est continue sur l'intervalle $[0, 1]$. L'unique primitive de la fonction f, valant 0 en 0, est donnée par $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2$. En particulier,

$$\int_0^1 (x^2 + 3x)\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2\right]_0^1 = \left(\frac{1}{3} \times 1^3 + \frac{3}{2} \times 1^2\right) - \left(\frac{1}{3} \times 0^3 + \frac{3}{2} \times 0^2\right) = \frac{3}{2}.$$

Exemple 2.3.4. On souhaite calculer l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x)\mathrm{d}x$. Pour déterminer une primitive de la fonction $x \mapsto \cos^2(x)$, l'idée est de "linéariser" le $\cos^2$. Plus précisément, en utilisant des formules usuelles de trigonométrie, on sait que $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$. En particulier, on a $\cos^2(x) = \frac{1}{2} + \frac{\cos(2x)}{2}$. L'unique primitive de la fonction $\cos^2$, valant 0 en 0, est donc donnée par $F(x) = \frac{x}{2} + \frac{\sin(2x)}{4}$. On obtient donc :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos(2x)}{2}\mathrm{d}x = \left[\frac{x}{2} + \frac{\sin(2x)}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}.$$

2.4 Formules d'intégration

Dans cette section, on fournit deux méthodes pratiques pour calculer des intégrales.

Théorème 2.4.1. *(Intégration par parties) Soient f et g deux fonctions dérivables, de dérivées continues, sur un intervalle $[a, b]$ avec $a \leq b$. Alors*

$$\int_a^b f(x)g'(x)\mathrm{d}x = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\mathrm{d}x.$$

Exemple 2.4.2. On souhaite calculer l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos(x)\mathrm{d}x$. Pour cela, on effectue une intégration par parties en posant $f(x) = x$ et $g(x) = \cos(x)$. Cela donne :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin(x)\mathrm{d}x = [x\sin(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} - [-\cos(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1.$$

Théorème 2.4.3. *(Changement de variables) Soit $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction continue sur un intervalle I et soit ϕ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ (i.e. dérivable et de dérivée continue) sur un intervalle $[a,b]$ et telle que $\phi([a,b]) \subset I$. Alors*

$$\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(\phi(t))\phi'(t)\mathrm{d}t.$$

Remarque 2.4.4. Informellement, l'idée du changement de variables est de poser $x = \phi(t)$. En particulier, $\mathrm{d}x = \phi'(t)\mathrm{d}t$. En remplaçant x par $\phi(t)$ et $\mathrm{d}x$ par $\phi'(t)\mathrm{d}t$ dans l'intégrale, on obtient alors que $\int f(x)\mathrm{d}x = \int f(\phi(t))\phi'(t)\mathrm{d}t$.

Exemple 2.4.5. On souhaite calculer l'intégrale suivante : $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$. Pour cela, on considère le changement de variables $x = \sin(t)$. Plus précisément, on pose $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ et

$$\begin{aligned} \phi : \left[0, \frac{\pi}{2}\right[&\to [0,1] \\ t &\mapsto \sin(t). \end{aligned}$$

La fonction ϕ est dérivable de dérivée $\phi'(t) = \cos(t)$. Concernant les bornes d'intégration, on prend $\phi(a) = 0$, $\phi(b) = 1$, $a = 0$ et $b = \frac{\pi}{2}$. En appliquant le théorème de changement de variables, on obtient :

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2(t)} \times \cos(t)\mathrm{d}t.$$

En remarquant que $1 - \sin^2(t) = \cos^2(t)$ et donc que $\sqrt{1-\sin^2(t)} = |\cos(t)|$, on en déduit que :

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos(t)| \times \cos(t)\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos(t)| \times \cos(t)\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4}.$$

Chapitre 3

Equations différentielles

Sommaire

3.1	**Généralités**	**19**
3.2	**Equation différentielle linéaire du premier ordre**	**19**
3.3	**Equation différentielle linéaire du second ordre**	**21**

3.1 Généralités

Définition 3.1.1. *Soient D un sous-ensemble de $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ et $\phi : D \to \mathbf{R} \times \mathbf{R}$.*

1. *On appelle équation différentielle d'ordre 1, l'équation fonctionnelle $(E) : y' = \phi(x, y)$, où y est une fonction inconnue de la variable x.*
2. *On appelle solution de l'équation (E) sur l'intervalle I toute application f dérivable sur I et telle que :*

$$\begin{cases} \forall x \in I, (x, f(x)) \in D \\ \forall x \in I, f'(x) = \phi(x, f(x)) \end{cases}$$

Exemple 3.1.2. L'équation $(E) : y' = xy^2$ est une équation différentielle de degré 1, avec $\phi(x, y) = xy^2$ et $D = \mathbf{R}^2$. Une solution de (E) sur l'intervalle $I = [1, +\infty[$ est la fonction f définie par $f(x) = -\frac{2}{x^2}$ puisque $f'(x) = \frac{4}{x^3} = xf(x)^2$ pour tout $x \in I$.

Dans ce qui suit, on s'intéressera au cas particulier des équations différentielles *linéaires.*

3.2 Equation différentielle linéaire du premier ordre

Equation à coefficients constants

Définition 3.2.1. *On appelle équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants, sans second membre, toute équation de la forme $y' = ay$, où a est un réel donné.*

Proposition 3.2.2. *Soit a un réel.*

1. *Les solutions de l'équation différentielle* $y' = ay$ *sont les fonctions* f*, définies sur* $\mathbf{R}$ *par* $f(x) = ke^{ax}$*, où* k *est un réel quelconque.*
2. *Parmi toutes les solutions de l'équation* $y' = ay$*, il en existe une seule qui prend une valeur donnée en un point donné.*

Définition 3.2.3. *On appelle équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants, avec second membre, toute équation de la forme* $y' = ay + b(x)$*, où* a *est un réel donné et* b *une fonction donnée.*

Proposition 3.2.4. *Soit* a *un réel,* $b : I \to \mathbf{R}$ *une fonction définie sur un intervalle* I *et* f_0 *une solution sur* I *de l'équation différentielle* $y' = ay + b(x)$*.*

1. *Les solutions de l'équation différentielle* $y' = ay + b(x)$ *sont les fonctions* f*, définies sur* I *par* $f(x) = ke^{ax} + f_0(x)$*, où* k *est un réel quelconque.*
2. *Parmi toutes les solutions de l'équation* $y' = ay + b(x)$*, il en existe une seule qui prend une valeur donnée en un point donné.*

Exemple 3.2.5. On souhaite résoudre l'équation différentielle $y' = y + x$ sur $\mathbf{R}$ avec condition initiale $y(0) = 2$. On vérifie facilement que la fonction f_0 définie par $f_0(x) = -x + 1$ est une solution particulière de l'équation $y' = y + x$. Les solutions de l'équation $y' = y + x$ sont donc les fonctions de la forme $f(x) = ke^x + (-x + 1)$, avec $k \in \mathbf{R}$. Parmi toutes ces fonctions, il en existe une seule telle que $f(0) = 2$: cette dernière est donnée par $f(x) = e^x - x + 1$.

En d'autres termes, la solution générale de l'équation différentielle complète est la somme d'une solution particulière et de la solution générale de l'équation sans second membre.

Recherche d'une solution particulière pour une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants avec second membre spécifique Dans ce paragraphe, on désigne par P un polynôme (à coefficients réels) de degré n. Pour trouver une solution particulière de l'équation $y' = ay + b(x)$, où $a \in \mathbf{R}$, on peut procéder comme suit :

- Si $b(x) = P(x)e^{mx}$: on cherche une solution sous la forme $x \mapsto Q(x)e^{mx}$, où Q est un polynôme (à coefficients réels) de degré
  - $deg(Q) \leq n$ si $m \neq a$;
  - $deg(Q) \leq n + 1$ si $m = a$.
- Si $b(x) = P(x)\cos(mx)$ ou $b(x) = P(x)\sin(mx)$: on cherche, à l'aide de la méthode ci-dessus, une solution complexe $y_{\mathbf{C}}$ de $y' = ay + P(x)e^{ikx}$. Alors $Re(y_{\mathbf{C}})$ est une solution particulière de $y' = ay + P(x)\cos(kx)$ et $Im(y_{\mathbf{C}})$ est une solution particulière de $y' = ay + P(x)\sin(kx)$.

Dans des cas plus compliqués, on utilisera la méthode de variation de la constante exposée dans la section suivante.

Cas général

Définition 3.2.6. 1. *L'équation différentielle* $(L) : y' = a(x)y + b(x)$*, où* a *et* b *sont deux fonctions, est appelée équation différentielle linéaire du premier ordre.*

2. *L'équation différentielle* $(H) : y' = a(x)y + b(x)$ *est appelée équation différentielle homogène ou sans second membre associée à* (L)*.*

Proposition 3.2.7. *Soit* a *une fonction continue sur un intervalle* I*.*

1. *Les solutions de l'équation différentielle* $y' = a(x)y$ *sur* I *sont les fonctions* f*, définies sur* I *par* $f(x) = ke^{A(x)}$*, où* k *est un réel quelconque et* A *une primitive de* a *sur* I*.*

2. *Parmi toutes les solutions de l'équation $y' = a(x)y$, il en existe une seule qui prend une valeur donnée en un point donné.*

Théorème 3.2.8. *Soient a et b deux fonctions continues sur un intervalle I et f_0 une solution sur I de l'équation différentielle $y' = a(x)y + b(x)$.*

1. *Les solutions de l'équation différentielle $y' = a(x)y+b(x)$ sur I sont les fonctions f, définies sur I par $f(x) = ke^{A(x)} + f_0(x)$, où k est un réel quelconque et A une primitive de a sur I.*
2. *Parmi toutes les solutions de l'équation $y' = a(x)y$, il en existe une seule qui prend une valeur donnée en un point donné.*

Proposition 3.2.9. *(Principe de superposition) Soient a, b_1 et b_2 trois fonctions continues sur un intervalle I. Si y_1 est une solution particulière sur I de $y' = a(x)y + b_1(x)$ et si y_2 est une solution particulière sur I de $y' = a(x)y + b_2(x)$, alors $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$ est une solution particulière sur I de $y' = a(x)y + \lambda_1 1 b_1(x) + \lambda_2 b_2(x)$, pour tous $\lambda_2, \lambda_2 \in \mathbf{R}$.*

Exemple 3.2.10. On souhaite résoudre l'équation différentielle $y' = \sin(x)y + (2x - x^2\sin(x))$ sur $\mathbf{R}$. On vérifie facilement que la fonction f_0 définie par $f_0(x) = x^2$ est une solution particulière de l'équation. Puisque une primitive de la fonction sin est $-\cos$, on en déduit que les solutions de l'équation $y' = \sin(x)y + (2x - x^2\sin(x))$ sont les fonctions de la forme $f(x) = ke^{-\cos(x)} + x^2$, avec $k \in \mathbf{R}$.

Pour chercher une solution particulière de (L), on peut :
- trouver une solution évidente ;
- chercher une solution sous une forme particulière ;
- appliquer la méthode de variation de la constante.

Méthode de variation de la constante

Pour trouver une solution de (L) sur I, on la cherche sous la forme $y(x) = k(x)e^{A(x)}$, où k est une fonction de x.
- En utilisant le fait que $y'(x) = a(x)y(x) + b(x)$, on obtient une expression de $k'(x)$.
- On en déduit l'expression de k en intégrant k'.

Exemple 3.2.11. On souhaite trouver une solution particulière de l'équation $y' = xy + x$. Pour cela, on cherche la solution sous la forme $y(x) = k(x)e^{\frac{1}{2}x^2}$. Puisque $y'(x) = xy(x) + x$, on a :

$$k'(x)e^{\frac{1}{2}x^2} + k(x)xe^{\frac{1}{2}x^2} = xk(x)e^{\frac{1}{2}x^2} + x.$$

En simplifiant, on obtient $k'(x) = xe^{-\frac{1}{2}x^2}$. En intégrant, cela donne $k(x) = -e^{-\frac{1}{2}x^2}$. Une solution particulière est donc la fonction f_0 définie sur $\mathbf{R}$ par $f_0(x) = -e^{-\frac{1}{2}x^2} \times e^{\frac{1}{2}x^2} = -1$.

3.3 Equation différentielle linéaire du second ordre

Définition 3.3.1.
1. *L'équation différentielle $(L) : y'' + ay' + by = c(x)$, où a et b sont deux réels et c une fonction donnée, est appelée équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants.*
2. *L'équation différentielle $(H) : y'' + ay' + by = 0$ est appelée équation différentielle homogène ou sans second membre associée à (L).*

Résolution de l'équation (H)

Pour résoudre l'équation différentielle homogène, on commence par résoudre l'équation dite caractéristique (E_c) : $r^2 + ar + b = 0$.

Théorème 3.3.2. *Soient a et b deux réels.*

1. *Les solutions de l'équation homogène $y'' + ay' + b = 0$ sont les fonctions définies sur $\mathbf{R}$ de la forme suivante :*
   - *$x \mapsto \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x}$, où r_1 et r_2 sont solutions réelles de (E_c) ;*
   - *$x \mapsto (\lambda x + \mu)e^{r_1 x}$, où $r_1 = r_2$ est l'unique solution réelle de (E_c) ;*
   - *$x \mapsto e^{\alpha x}(\lambda \cos(\omega x) + \mu \sin(\omega x))$, où $r_1 = \alpha + i\omega$ et $r_2 = \alpha - i\omega$ sont solutions complexes de (E_c).*

   Dans les trois cas, les nombres λ et μ sont des constantes réelles.

Si de plus une condition initiale de la forme $y(x_0) = y_0$ et $y'(x_0) = y_1$ est fixée, avec $x_0 \in \mathbf{R}$ et $y_0 \in \mathbf{R}$ alors les valeurs des constantes λ et μ sont fixées. En particulier, l'équation avec condition initiale possède une unique solution.

Résolution de l'équation (L)

Proposition 3.3.3. *Si f_0 est une solution particulière de (L) et si (S) est l'ensemble des solutions de l'équation homogène (H), alors l'ensemble des solutions de (L) est l'ensemble des fonctions $f_0 + f$, où f appartient à (S).*

Recherche d'une solution particulière pour une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants avec second membre spécifique Dans ce paragraphe, on désigne par P et Q deux polynômes (à coefficients réels) de même degré, égal à n . Pour trouver une solution particulière de l'équation $y'' + ay' + by = c(x)$, où $a, b \in \mathbf{R}$, on peut procéder comme suit :

- Si $b(x) = P(x)e^{mx}$: on cherche une solution sous la forme suivante :
  - $Q(x)e^{mx}$ si m n'est pas racine de (E_c) ;
  - $xQ(x)e^{mx}$ si m est racine simple de (E_c) ;
  - $x^2Q(x)e^{mx}$ si m est racine double de (E_c).
- Si $b(x) = P(x)\cos(mx)$ ou $b(x) = P(x)\sin(mx)$: on utilise la propriété $\cos(\alpha x) = Re(e^{i\alpha x})$ et $\sin(\alpha x) = Im(e^{i\alpha x})$, puis on applique la méthode précédente, en ne conservant que la partie réelle ou imaginaire de la solution obtenue.

Principe de superposition Dans le même esprit que pour les équations différentielles de degré 1, ce principe est fondé sur le fait que :

- si g_1 est solution de $y'' + ay' + by = c_1$;
- si g_2 est solution de $y'' + ay' + by = c_2$;

alors $\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2$ est solution de $y'' + ay' + by = \lambda_1 c_1(x) + \lambda_2 c_2(x)$.

Chapitre 4

Géométrie euclidienne

Sommaire

4.1	**Géométrie dans le plan**	**23**
4.2	**Géométrie dans l'espace**	**26**
4.3	**Complément de trigonométrie**	**29**

4.1 Géométrie dans le plan

On désigne par $\mathcal{P}$ l'ensemble des points du plan et par $\mathcal{V}$ l'ensemble des vecteurs du plan.

Modes de repérage dans le plan

Vecteurs du plan Dans $\mathcal{V}$, on définit une addition qui vérifie les propriétés suivantes :
- elle est commutative : $\forall(\vec{u},\vec{v}) \in \mathcal{V}^2$, $\vec{u}+\vec{v} = \vec{v}+\vec{u}$;
- elle est associative : $\forall(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) \in \mathcal{V}^3$, $\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w}) = (\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}$;
- elle admet un élément neutre $\vec{0}$: $\forall\vec{u} \in \mathcal{V}$, $\vec{u}+\vec{0} = \vec{u}$;
- elle est telle que tout vecteur du plan admet un symétrique : $\forall\vec{u} \in \mathcal{V}, \exists\vec{v} \in \mathcal{V}$; $\vec{u}+\vec{v} = \vec{0}$.

Dans $\mathcal{V}$, on définit une multiplication externe qui au réel λ et au vecteur $\vec{u}$ associe le vecteur $\lambda\cdot\vec{u}$ et qui possède les propriétés suivantes :
- $\forall\vec{u} \in \mathcal{V}$, $1\cdot\vec{u} = \vec{u}$;
- $\forall(\lambda,\mu) \in \mathbf{R}^2, \forall\vec{u} \in \mathcal{V}$, $\lambda\cdot(\mu\cdot\vec{u}) = (\lambda\mu)\cdot\vec{u}$;
- $\forall\lambda \in \mathbf{R}, \forall(\vec{u},\vec{v}) \in \mathcal{V}^2$, $\lambda\cdot(\vec{u}+\vec{v}) = \lambda\cdot\vec{u}+\lambda\cdot\vec{v}$;
- $\forall(\lambda,\mu) \in \mathbf{R}^2, \forall u \in \mathcal{V}$, $(\lambda+\mu)\cdot\vec{u} = \lambda\cdot\vec{u}+\mu\cdot\vec{u}$.

Pour résumer toutes ces propriétés, on dit que $(\mathcal{V},+,\cdot)$ est un espace vectoriel sur $\mathbf{R}$.

Repères cartésiens et bases

Définition 4.1.1. *Un repère cartésien du plan $\mathcal{P}$ est un triplet $(O,\vec{e_1},\vec{e_2})$ constitué d'un point O et de deux vecteurs $\vec{e_1}$ et $\vec{e_2}$ non colinéaires.*
- *Ce repère est dit orthogonal lorsque les vecteurs $\vec{e_1}$ et $\vec{e_2}$ sont orthogonaux.*
- *Ce repère est dit orthonormé lorsque les vecteurs $\vec{e_1}$ et $\vec{e_2}$ sont orthogonaux et normés, c'est-à-dire $\|\vec{e_1}\| = \|\vec{e_2}\| = 1$.*

Lorsque, de plus, l'angle $(\vec{e_1},\vec{e_2})$ a pour mesure $+\frac{\pi}{2}$, le repère est dit orthonormé direct.

Définition 4.1.2. *Un repère $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$ étant donné, pour tout point M du plan, il existe un unique couple (x, y) de réels tels que $\overrightarrow{OM} = x\vec{e_1} + y\vec{e_2}$. Le couple (x, y) s'appelle couple de coordonnées de M dans le repère $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$.*

On dit également que $(\vec{e_1}, \vec{e_2})$ est une base de l'ensemble des vecteurs $\mathcal{V}$ du plan si le repère $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$ est un repère cartésien du plan $\mathcal{P}$.

Coordonnées polaires Soit $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$ un repère orthonormé direct. Soit M un point du cercle de centre O et de rayon 1 et soient H et K les projetés orthogonaux de M sur l'axe des abscisses $(O, \vec{e_1})$ et l'axe des ordonnées $(O, \vec{e_2})$ respectivement. Désignons par $\theta \in \mathbf{R}$ une mesure de l'angle $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM})$ (unique modulo 2π). Alors :
- $\cos\theta$ est l'abscisse du point M, c'est-à-dire $\cos\theta = \frac{OH}{OM}$;
- $\sin\theta$ est l'ordonnée du point M, c'est-à-dire $\sin\theta = \frac{OK}{OM}$;
- $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$.

Remarque 4.1.3.
1. Les fonctions cos et sin sont périodiques de période 2π et la fonction tan est périodique de période π.
2. Pour tout $\theta \in \mathbf{R}$, on a $\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$ (théorème de Pythagore).

Définition 4.1.4. *Etant donné un point M du plan, on appelle coordonnées polaires de M tout couple (r, θ) de réels tels que*

$$\overrightarrow{OM} = r \cdot \vec{u}(\theta), \text{ où } \vec{u}(\theta) = \cos\theta\vec{e_1} + \sin\theta\vec{e_2}.$$

En d'autres termes, chaque point du plan peut-être repéré par sa coordonnée radiale r et sa coordonnée angulaire θ. Il est d'usage de prendre $r \geq 0$ et $\theta \in]-\pi, \pi]$.

Remarque 4.1.5. Le point M de coordonnées cartésiennes (x, y) admet pour coordonnées polaires (r, θ) si et seulement si $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$.

Exemple 4.1.6. Le point de coordonnées cartésiennes $(x, y) = (\sqrt{2}, \sqrt{2})$ a pour coordonnées polaires $(r, \theta) = (2, -\frac{\pi}{4})$.

Produit scalaire dans le plan

Définition 4.1.7. *On appelle produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le réel noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$ défini de la façon suivante :*
- *si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls, $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \cos(\vec{u}, \vec{v})$;*
- *si l'un des deux vecteurs $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ est nul, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.*

Proposition 4.1.8. *Pour tous vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ et pour tout réel λ, on a les propriétés suivantes :*
1. *$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$;*
2. *$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$;*
3. *$(\lambda\vec{u}) \cdot \vec{v} = \lambda\vec{u}\vec{v}$.*

Pour résumer ces propriétés, on dit que le produit scalaire et bilinéaire symétrique. Pour tout vecteur $\vec{u}$ du plan, on note $\vec{u}^2 = \vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$. Des conséquences directes des propriétés ci-dessus sont les suivantes :
- $(\vec{u} + \vec{v})^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v}$;
- $(\vec{u} - \vec{v})^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v}$;

- $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$.

Le résultat suivant permet de déterminer si deux vecteurs orthogonaux.

Proposition 4.1.9. *Deux vecteurs sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul, c'est-à-dire si l'un deux est nul ou si leur angle a pour mesure $+\frac{\pi}{2}$ ou $-\frac{\pi}{2}$.*

Interprétation en terme de projection Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls et soient O, A, B trois points tels que $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$. Si H est le projeté orthogonal de B sur la droite (OA), on a $\vec{u}\cdot v = \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OH}$.

Expression dans une base orthonormée

Proposition 4.1.10. *Si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ admettent comme composantes (x, y) et (x', y') dans une base orthonormée $(\vec{e_1}, \vec{e_2})$, alors $\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy'$ et $\vec{u} = \sqrt{x^2+y^2}$.*

Proposition 4.1.11. *Si les points A et B admettent pour coordonnées (x_A, y_A) et (x_B, y_B) dans un repère orthonormé $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$, alors*

$$AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

Projection orthogonale sur une droite

Proposition 4.1.12. *Soient $\mathcal{D}$ une droite de vecteur directeur unitaire $\vec{u}$. Soit $\vec{v}$ un vecteur du plan et $\vec{v'}$ son projeté orthogonal sur $\mathcal{D}$. Alors $\vec{v'} = (\vec{u}\cdot\vec{v})\vec{u}$.*

Déterminant de deux vecteurs dans le plan

Définition 4.1.13. *Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan. On appelle déterminant de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le nombre réel noté $Det(\vec{u}, \vec{v})$ défini par :*

- *$Det(\vec{u}, \vec{v}) = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\sin(\vec{u}, \vec{v})$ si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls ;*
- *$Det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ sinon.*

La proposition suivante fournit une interprétation géométrique du déterminant.

Remarque 4.1.14. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan. Soient A, B, C, D les points du plan définis par $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$ et $\overrightarrow{AD} = \vec{u}+\vec{v}$. Alors $|\mathrm{Det}(\vec{u}, \vec{v})|$ est égal à l'aire du parallèlogramme (A, B, C, D).

On en déduit la propriété suivante :

Proposition 4.1.15. *La distance d'un point C à la droite passant par les points A et B est égale à $\frac{|Det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})|}{\|\overrightarrow{AB}\|}$.*

Proposition 4.1.16. *Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de composantes (x, y) et (x', y') dans une base orthonormée. Alors $Det(\vec{u}, \vec{v})$ est noté $\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}$ et on a $Det(\vec{u}, \vec{v}) = xy' - x'y$.*

Proposition 4.1.17. *Pour tous vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ et pour tout réel λ, on a les propriétés suivantes :*

- *$Det(\vec{u}, \vec{v}) = -Det(\vec{v}, \vec{u})$;*
- *$Det(\vec{u}+\vec{v}, \vec{w}) = Det(\vec{u}, \vec{w}) + Det(\vec{v}, \vec{w})$;*
- *$Det(\lambda\vec{u}, \vec{v}) = Det(\vec{u}, \lambda\vec{v}) = \lambda Det(\vec{u}, \vec{v})$.*

Pour traduire ces propriétés, on dit que Det est une forme bilinéaire antisymétrique.

Proposition 4.1.18. *Deux vecteurs du plan sont colinéaires si et seulement si leur déterminant est nul.*

4.2 Géométrie dans l'espace

On note $\mathcal{E}$ l'ensemble des points de l'espace et $\mathcal{W}$ l'ensemble des vecteurs de l'espace. On définit dans $\mathcal{W}$ une addition et une multiplication externe qui possède les mêmes propriétés que dans le plan. On dit également que $(\mathcal{W}, +, \cdot)$ est un espace vectoriel sur $\mathbf{R}$.

Modes de repérage dans l'espace

Coordonnées cartésiennes

Définition 4.2.1. *Un repère cartésien de l'espace $\mathcal{E}$ est un quadruplet $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ constitué d'un point O et de trois vecteurs $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ non coplanaires.*

- *Ce repère est dit orthogonal lorsque les vecteurs $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ sont deux à deux orthogonaux.*
- *Ce repère est dit orthonormé lorsque les vecteurs $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ sont deux à deux orthogonaux et normés.*

On définit, de la même manière que dans le plan, le triplet de coordonnées d'un point, les bases de $\mathcal{W}$ et le triplet des composantes d'un vecteur. Les règles de calcul sur les composantes sont les mêmes que dans le plan.

Coordonnées sphériques

Définition 4.2.2. *Considérons un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ dans l'espace $\mathcal{E}$. Pour tout point M de l'espace n'appartenant pas à l'axe $(O, \vec{e_3})$, on appelle coordonnées sphériques de M tout triplet (r, θ, ϕ) tels que :*

- *$r = \|\overrightarrow{OM}\|$;*
- *θ est une mesure de l'angle orienté $(\vec{e_1}, \overrightarrow{OH})$, où H est le projeté orthogonal de M sur le plan $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$;*
- *ϕ est la mesure entre 0 et π de l'angle non orienté entre $\vec{e_3}$ et $\overrightarrow{OM}$, mesuré dans le plan les contenant.*

Proposition 4.2.3. *Si (r, θ, ϕ) est un système de coordonnées sphériques d'un point M dans un repère orthonormé $\mathcal{R}$, alors les coordonnées cartésiennes (x, y, z) de M dans $\mathcal{R}$ sont $x = r \sin\phi \cos\theta$, $y = r \sin\phi \sin\theta$ et $z = r \cos\phi$.*

Produit scalaire dans l'espace

Définition 4.2.4. *Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls de l'espace. L'écart angulaire (ou angle non oriénté) entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le réel $\theta \in [0, \pi]$ défini de la façon suivante :*

- *si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires de même sens, alors $\theta = 0$;*
- *si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires de sens contraires, alors $\theta = \pi$;*
- *si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires et si O, A, B sont les points définis par $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$, alors θ est la mesure dans le plan (OAB) de l'angle non orienté $\widehat{AOB}$.*

Définition 4.2.5. *Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace. Le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$ est le réel défini de la façon suivante :*

- *si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls et si θ est leur écart angulaire, $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \cos\theta$;*
- *si $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ est nul, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.*

On a les mêmes propriété que dans le plan. En particulier, si (x, y, z) et (x', y', z') sont les composantes de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans une base orthonormée, alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$.

Projection orthogonale sur une droite

Proposition 4.2.6. *Soit $\mathcal{D}$ une droite de vecteur directeur unitaire $\vec{u}$. Pour tout vecteur $\vec{v}$ de l'espace, le projeté orthogonal $\vec{v'}$ de $\vec{v}$ sur $\mathcal{D}$ est donné par $\vec{v'} = (\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{u}$.*

Projection orthogonale sur un plan

Proposition 4.2.7. *Soit $\mathcal{P}$ un plan de vecteurs directeurs unitaires et orthogonaux $\vec{u_1}$ et $\vec{u_2}$. Pour tout vecteur $\vec{v}$ de l'espace, le projeté orthogonal $\vec{v'}$ de $\vec{v}$ sur $\mathcal{P}$ est donné par $\vec{v'} = (\vec{u_1} \cdot \vec{v})\vec{u_1} + (\vec{u_2} \cdot \vec{v})\vec{u_2}$.*

Produit vectoriel

Soit $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ une base de l'espace. On convient que $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ est directe lorsqu'en tournant de $\vec{e_1}$ vers $\vec{e_2}$, on progresse dans le sens de $\vec{e_3}$ en vissant. Sinon, on dit que $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ est indirecte.

- Si on remplace un vecteur de la base par son opposé, la base change d'orientation.
- Si on échange deux vecteurs de la base, la base change d'orientation.
- Si on fait une permutation circulaire sur les vecteurs de la base, la base ne change pas d'orientation.

Définition 4.2.8. *Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace. Le produit vectoriel de $\vec{u}$ par $\vec{v}$ est le vecteur noté $\vec{u} \wedge \vec{v}$ défini de la façon suivante :*

- *si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, alors $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$;*
- *sinon, si on appelle θ l'écart angulaire entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$, alors $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est le vecteur orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tel que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$ soit direct et de norme égale à $\|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \sin\theta$.*

Remarque 4.2.9. Si $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ est une base orthonormée directe alors $\vec{e_1} \wedge \vec{e_2} = e_3$, $\vec{e_2} \wedge \vec{e_3} = e_1$ et $\vec{e_3} \wedge \vec{e_1} = e_2$.

Proposition 4.2.10. *Pour tous vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ et pour tout réel λ, on a les propriétés suivantes :*

- *$\vec{u} \wedge \vec{v} = -(\vec{v} \wedge \vec{u})$;*
- *$\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}$;*
- *$(\lambda\vec{u}) \wedge \vec{v} = \vec{u} \wedge (\lambda\vec{v}) = \lambda(\vec{u} \wedge \vec{v})$.*

On résume ces propriété en disant que le produit vectoriel est bilinéaire antisymétrique.

Proposition 4.2.11. *Si (x, y, z) et (x', y', z') sont les composantes des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans une base orthonormée directe, alors les composantes (X, Y, Z) du produit vectoriel $\vec{u} \wedge \vec{v}$ sont :*

$$X = \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} \qquad Y = \begin{vmatrix} z & z' \\ x & x' \end{vmatrix} \qquad Z = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}$$

Exemple 4.2.12. Soient $\vec{u} = (1, 2, -1)$, $\vec{v} = (1, -2, 3)$. Alors $\vec{u} \wedge \vec{w} = (-4, 4, 4)$.

Proposition 4.2.13. *Soient A, B, C trois points de l'espace $\mathcal{E}$. Alors l'aire du triangle (ABC) est égale à $\frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|$.*

Exemple 4.2.14. Soient $A(1, 1, 0)$, $B(0, 1, 0)$ et $C(2, 3, 0)$. On souhaite calculer l'aire du triangle (ABC). On obtient que $\overrightarrow{AB} = (-1, 0, 0)$ et $\overrightarrow{AC} = (1, 2, 0)$. En particulier, $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = (0, 0, -2)$. L'aire du triangle (ABC) est donc égale à $\frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\| = 1$.

Proposition 4.2.15. *Soient $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ trois vecteurs de l'espace. Alors :*

1. *$(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} = (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{w})\vec{u}$;*
2. *$\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{w}$.*

Déterminant ou produit mixte

Définition 4.2.16. *Soient $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ trois vecteurs de l'espace. On appelle déterminant (ou produit mixte) de $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ le nombre réel suivant :*

$$Det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w}.$$

Remarque 4.2.17. Dans le même esprit que pour le déterminant dans le cas du plan, le déterminant dans l'espace peut s'interpréter comme le volume d'un parallélépipède rectangle.

Proposition 4.2.18. *Si (x, y, z), (x', y', z'), (x'', y'', z'') sont les composantes des vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ dans une base orthonormée directe, alors*

$$Det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = x \begin{vmatrix} y' & y'' \\ z' & z'' \end{vmatrix} - x' \begin{vmatrix} y & y'' \\ z & z'' \end{vmatrix} + x'' \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix}.$$

Remarque 4.2.19. Si (x, y, z), (x', y', z'), (x'', y'', z'') sont les composantes des vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ dans une base orthonormée directe, il est d'usage de noter :

$$\mathrm{Det}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix}.$$

On a alors $\mathrm{Det}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = (xy'z'' + yz'x'' + zx'y'') - (zy'x'' + yx'z'' + xy''z')$, que l'on peut interpréter comme étant égal à ”la somme des produits des termes des diagonales descendantes” moins ”la somme des produits des termes des diagonales montantes” (règle de Sarrus).

Exemple 4.2.20. Soient $\vec{u} = (1, 1, 2)$, $\vec{v} = (0, 3, 2)$ et $\vec{w} = (0, 1, 1)$. Le déterminant de $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ est égal à :

$$\mathrm{Det}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 2 = 1.$$

En particulier, le volume du parallélépipède engendré par les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$, dont l'origine est un sommet, est égal à 1.

Proposition 4.2.21. *Pour tous vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ et pour tout réel λ, on a les propriétés suivantes :*

- *$Det(\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}) = -Det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$;*
- *$Det(\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}) = Det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$;*
- *si deux des trois vecteurs sont égaux, alors le déterminant est nul ;*
- *$Det(\lambda\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \lambda Det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$;*
- *$Det(\vec{u_1} + \vec{u_2}, \vec{v}, \vec{w}) = Det(\vec{u_1}, \vec{v}, \vec{w}) + Det(\vec{u_2}, \vec{v}, \vec{w})$ (et on a des propriétés analogues avec $\vec{v}$ et $\vec{w}$).*

Proposition 4.2.22. *Trois vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sont coplanaires si et seulement si $Det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 0$.*

4.3 Complément de trigonométrie

Formulaires

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x \qquad \sin(\pi-x)=\sin x \qquad \sin(\pi+x)=-\sin x$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x \qquad \cos(\pi-x)=-\cos x \qquad \cos(\pi+x)=-\cos x$$
$$\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\frac{1}{\tan x} \qquad \tan(\pi-x)=-\tan x \qquad \tan(\pi+x)=\tan x$$

$$\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b$$
$$\sin(a+b)=\sin a\cos b+\sin b\cos a$$
$$\tan(a+b)=\frac{\tan a+\tan b}{1-\tan a\tan b}$$

$$\cos(2a)=\cos^2 a-\sin^2 a=1-2\sin^2 a=2\cos^2 -1$$
$$\sin(2a)=2\sin a\cos a$$
$$\tan(2a)=\frac{2\tan a}{1-\tan^2 a}$$

$$\cos a\cos b=\frac{1}{2}(\cos(a+b)+\cos(a-b))$$
$$\sin a\sin b=\frac{1}{2}(\cos(a-b)-\cos(a+b))$$
$$\sin a\cos b=\frac{1}{2}(\sin(a+b)+\sin(a-b))$$

$$\sin p+\sin q=2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$
$$\cos p+\cos q=2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$
$$\sin p-\sin q=2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$
$$\cos p-\cos q=-2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

Valeurs remarquables

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\tan x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$		0

Chapitre 5

Nombres complexes

Sommaire

5.1	**Forme algébrique d'un nombre complexe**	**31**
5.2	**Forme trigonométrique d'un nombre complexe**	**32**
5.3	**Nombres complexes et géométrie**	**34**
5.4	**Equations algébriques**	**34**
5.5	**Applications à la trigonométrie**	**36**

5.1 Forme algébrique d'un nombre complexe

Proposition 5.1.1. *Il existe un ensemble noté* $\mathbf{C}$*, appelé ensemble des nombres complexes qui possède les propriétés suivantes :*

- $\mathbf{C}$ *contient l'ensemble des nombres réels ;*
- *l'addition et la multiplication des nombres réels se prolongent aux nombres complexes et les règles de calcul restent les mêmes ;*
- *il existe un nombre complexe noté* i *tel que* $i^2 = 1$ *;*
- *tout nombre complexe* z *s'écrit de manière unique sous la forme* $z = x + iy$*, où* x *et* y *sont des nombres réels.*

L'écriture $z = x + iy$ s'appelle la forme algébrique du nombre complexe z.

Définition 5.1.2. *Soit* $z = x + iy \in \mathbf{C}$ *un nombre complexe. Le nombre réel* x *s'appelle la partie réelle de* z *et le nombre réel* y *s'appelle la partie imaginaire de* y*.*

Remarque 5.1.3. Soient z et z' deux nombres complexes. Alors $z = z'$ si et seulement si $\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(z')$ et $\mathrm{Im}(z) = \mathrm{Im}(z')$.

Lorsque la partie réelle d'un nombre complexe z est égal à 0, c'est-à-dire $z = iy$, on dit que z est un imaginaire pur. Dans ce qui suit, on désigne par $i\mathbf{R} := \{iy : y \in \mathbf{R}\}$ l'ensemble des imaginaires purs.

Remarque 5.1.4. Etant donné un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on peut faire correspondre à chaque nombre complexe $z = x + iy$ un unique point $M(z)$ de coordonnées (x, y). On dit que z est l'affixe du point $M(z)$. En particulier :

- l'abscisse de $M(z)$ est égal à la partie réelle de z et l'ordonnée de $M(z)$ est égal à la partie imaginaire de z ;
- l'axe des abscisses est l'axe des nombres réels et l'axe des ordonnées est l'axe des imaginaires purs.

Définition 5.1.5. *Soit $z := x+iy \in \mathbf{C}$ un nombre complexe. On appelle conjugué de z le nombre complexe noté $\overline{z}$ et défini par $\overline{z} := x - iy$.*

Remarque 5.1.6. Si M est un point du plan d'affixe z, alors le symétrique de M par rapport à l'axe des abscisses a pour affixe $\overline{z}$.

Proposition 5.1.7. *Soient z et $z' \in \mathbf{C}$ deux nombres complexes. On a :*

1. *$Re(z) = Re(\overline{z})$ et $Im(z) = Im(\overline{z})$;*
2. *$\overline{\overline{z}} = z$;*
3. *$\overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'}$ et $\overline{z \cdot z'} = \overline{z} \cdot \overline{z'}$;*
4. *$\overline{\frac{1}{z}} = \frac{1}{\overline{z}}$.*

Proposition 5.1.8. *Soit $z \in \mathbf{C}$ un nombre complexe.*

1. *On a $Re(z) = \frac{z+\overline{z}}{2}$ et $Im(z) = \frac{z-\overline{z}}{2i}$.*
2. *En particulier, $z \in \mathbf{R} \Longleftrightarrow z = \overline{z}$ et $z \in i\mathbf{R} \Longleftrightarrow z + \overline{z} = 0$.*

5.2 Forme trigonométrique d'un nombre complexe

Module

Définition et propriétés

Définition 5.2.1. *Soit $z = x + iy \in \mathbf{C}$. On appelle module de z le nombre réel positif, noté $|z|$, et défini par $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$.*

Remarque 5.2.2. 1. Pour un réel x, le module de x est égal à la valeur absolue de x.

2. Si M est un point du plan d'affixe z dans un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$, alors $|z|$ est égal à la norme du vecteur $\overrightarrow{OM}$, ou encore égal à la distance du point M au point O.

Proposition 5.2.3. *1. Soient z et z' deux nombres complexes. Alors*

   (a) $|z| = \sqrt{z\overline{z}}$;

   (b) $|zz'| = |z||z'|$;

   (c) $|z| = |\overline{z}| = |-z| = |-\overline{z}|$;

   (d) $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$.

2. De plus, $|z| = 0 \Longleftrightarrow z = 0$.

Théorème 5.2.4. *(Inégalités triangulaires) Soient z et z' deux nombres complexes. Alors*

1. *$||z| - |z'|| \leq |z + z'| \leq |z| + |z'|$;*
2. *$|z + z'| = |z| + |z'|$ si et seulement si z et z' sont $\mathbf{R}_+$ proportionnels.*

Nombres complexes de module 1 On désigne $\mathbf{U} := \{z \in \mathbf{C} : |z| = 1\}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1. En particulier, l'ensemble des points dont les affixes sont dans $\mathbf{U}$ est égal au cercle de centre 0 et de rayon 1 du plan.

Définition 5.2.5. *Pour tout $\theta \in \mathbf{R}$, on définit $e^{i\theta}$ par $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$.*

En particulier, pour tout $z \in \mathbf{U}$, il existe $\theta \in \mathbf{R}$ tel que $z = e^{i\theta}$.

Théorème 5.2.6. *(Formules d'Euler) Pour tout $\theta \in \mathbf{R}$, on a :*

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \qquad \text{et} \qquad \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta - e^{-i\theta}}}{2i}.$$

Théorème 5.2.7.
1. *Pour tous $\theta, \theta' \in \mathbf{R}$, on a : $e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta}e^{i\theta'}$ et $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$.*
2. *Pour tout $n \in \mathbf{Z}$ et pour tout $\theta \in \mathbf{R}$, on a : $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$. En d'autres termes, on a : $\cos(n\theta) + i\sin(n\theta) = (\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n$.*

Argument d'un nombre complexe non nul

Définition 5.2.8. *Soit $z \in \mathbf{C}^*$. On appelle argument de z tout nombre $\theta \in \mathbf{R}$ tel que $\frac{z}{|z|} = e^{i\theta}$.*

On note $\arg(z) = \theta[2\pi]$ tout argument d'un nombre complexe non nul z. En particulier, il existe un unique argument compris entre $]-\pi, \pi]$, appelé argument principal. Tout nombre complexe $z \in \mathbf{C}^*$ s'écrit donc, de façon unique, sous la forme :

$$z = re^{i\theta} = r\cos(\theta) + ir\sin(\theta),$$

où $r \in \mathbf{R}_+^*$ et $\theta \in]-\pi, \pi]$. L'écriture précédente s'appelle la forme trigonométrique de z. Les quantités r et θ sont respectivement le module et l'argument principal de z.

Exemple 5.2.9.
1. Soit $z = 3e^{i\frac{\pi}{4}}$. On souhaite écrire z sous forme algébrique. On a : $z = 3\cos(\frac{\pi}{4}) + 3i\sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{3i\sqrt{2}}{2}$.
2. Soit $z = 1 - \sqrt{3}i$. On souhaite écrire z sous forme trigonométrique. Le module de z est égal à $|z| = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = 2$. On a donc

$$z = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}.$$

Remarque 5.2.10. Si un nombre complexe s'écrit sous la forme $z = ke^{i\theta}$, où $k \in \mathbf{R}^*$, alors :
- si $k > 0$, on a $|z| = k$ et $\arg(z) = \theta[2\pi]$;
- si $k < 0$, on a $|z| = k$ et $\arg(z) = \theta + \pi[2\pi]$.

Exemple 5.2.11. La forme trigonométrique du nombre $z = -e^{-\frac{\pi}{2}}$ (c'est-à-dire $z = -i$) est $z = e^{-i\frac{\pi}{2}}$. L'argument principal de $-e^{-\frac{\pi}{2}}$ est donc $-\frac{\pi}{2}$ et non $+\frac{\pi}{2}$.

Remarque 5.2.12. Soient z et z' deux nombres complexes. Alors $z = z' \iff |z| = |z'|$ et $\arg(z) = \arg(z')[2\pi]$.

Proposition 5.2.13. *Soient z et z' deux nombres complexes non nuls. Alors*
1. *$\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')[2\pi]$;*
2. *$\arg(\overline{z}) = -\arg(z)[2\pi]$;*
3. *$\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')$.*

5.3 Nombres complexes et géométrie

Affixes

On se place dans le plan affine euclidien E, muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$. L'application de $\mathbf{C}$ dans E, qui au complexe $z = x + iy$ associe le point $M(z)$ de coordonnées (x, y), est une bijection.

Définition 5.3.1. *Si M a pour coordonnées (x, y), le nombre complexe $z = x + iy$ s'appelle l'affixe de z.*

De même, l'affixe d'un vecteur de composantes (x, y) dans $(\vec{u}, \vec{v})$ est le complexe $z = x + iy$. En particulier, z est l'affixe du point M si et seulement z est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{OM}$.

Proposition 5.3.2. *Soient M, M' deux points du plan et soient z, z' leurs affixes. Alors :*

1. *le module de z est égal à $|z| = OM$ et l'argument $\arg(z)$ est égal à l'angle entre $\vec{u}$ et $\overrightarrow{OM}$ (modulo 2π) ;*
2. *le module de $z' - z$ est égal à $|z' - z| = MM'$ et l'argument $\arg(z' - z)$ est égal à l'angle entre $\vec{u}$ et $\overrightarrow{MM'}$ (modulo 2π) ;*

Proposition 5.3.3. *Soit $(a, b) \in \mathbf{C}^2$, $z \in \mathbf{C} \setminus \{a, b\}$ et soient M, A et B les points du plan d'affixes respectives z, a et b. Si $Z = \frac{z-a}{z-b}$, alors $|Z| = \frac{AM}{BM}$ et l'argument $\arg(Z)$ est égal à l'angle entre $\overrightarrow{BM}$ et $\overrightarrow{AM}$ (modulo 2π).*

Nombres complexes et transformations

Proposition 5.3.4. *Soient a et b deux nombres complexes avec $a \neq 0$ et soit f l'application qui au point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $z' = az + b$.*

- *Si $a = 1$, alors f est la translation d'affixe b ;*
- *Si $a \neq 1$, alors f admet un unique point invariant Ω et :*
  - *si $a \in \mathbf{R}^*$, la fonction f est l'homthétie de centre Ω et de rapport a ;*
  - *si $a \notin \mathbf{R}$ et $|a| = 1$, la fonction f est la rotation de centre Ω et d'angle $\arg(a)$;*
  - *si $a \notin \mathbf{R}$ et $|a| \neq 1$, la fonction f est la similitude de centre Ω, d'angle $\arg(a)$ et de rapport $|a|$.*

5.4 Equations algébriques

Le théorème suivant est connu sous le nom du théorème de d'Alembert ou du théorème fondamental de l'algèbre. Il garantit que toute équation d'ordre n admet n racines.

Théorème 5.4.1. *(Théorème d'Alembert) Soit P un polynôme de degré n à coefficients complexes. Alors, il existe n nombres complexes (éventuellement confondus) $z_1, \ldots, z_n$ tels que, pour tout $z \in \mathbf{C}$, on a : $P(z) = (z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n)$.*

En d'autres termes, toute équation de d'ordre n dans $\mathbf{C}$ admet n solutions. Une telle propriété n'est pas vraie pour l'ensemble des nombres réels.

Racines n-ièmes d'un complexe

Définition 5.4.2. *Soient $a \in \mathbf{C}$ et $n \in \mathbf{N}$ tel que $n \geq 2$. On appelle racine n-ième de a tout nombre complexe z tel que $z^n = a$.*

Remarquons que $z^n = 0$ si et seulement si $z = 0$. On se limite donc, dans la suite, au cas où $a \neq 0$.

Racines carrées de $a \in \mathbf{C}^*$ Pour déterminer les racines carrées d'un nombre complexe a non nul, on procéder de deux façons : sous forme algébrique et sous forme trigonométrique.

- Sous forme algébrique, on résout l'équation $z^2 = a$, en posant $z = x + iy$ et $a = \alpha + i\beta$. En identifiant parties réelles et imaginaires, on obtient : $z^2 = a \iff (x+iy)^2 = \alpha + i\beta \iff x^2 - y^2 = \alpha$ et $2xy = \beta$. En remarquant que $|z|^2 = |a| \implies x^2 + y^2 = |a|$, on se ramène à résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = \alpha \\ x^2 + y^2 = |a| \\ 2xy = \beta \end{cases}$$

- Sous forme trigonométrique, on détermine le module r et un argument θ de a. Les racines carrés de a sont alors les nombres complexes : $z_1 = \sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}$ et $z_2 = \sqrt{r}e^{i(\frac{\theta}{2}+\pi)}$.

Exemple 5.4.3. On souhaite déterminer les (deux) racines carrées de i de deux façons.

- Sous forme algébrique : on cherche $z = x + iy$ tel que $z^2 = i$. Cela donne $(x+iy)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi = i$. En identifiant parties réelles et imaginaires, on a : $x^2 - y^2 = 0$ et $2xy = 1$. En considérant les modules, on a : $x^2 + y^2 = |i| = 1$. On a donc :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \\ 2xy = 1 \end{cases}$$

  Les solutions du système ci-dessus étant $(x_1, y_1) = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ et $(x_2, y_2) = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$, les racines carrées de i sont donc $z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $z_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$.
- Sous forme trigonométrique : on cherche $z = re^{i\phi}$ tel que $z^2 = i$. En écrivant i sous forme trigonométrique, c'est-à-dire $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$, on a donc : $r^2e^{i\phi} = e^{i\frac{\pi}{2}}$. En identifiant modules et arguments, cela donne $r = 1$ et $\phi = \frac{\pi}{4}$ ou $\phi = \frac{\pi}{4} + \pi$. Les racines carrées de i sont donc les nombres complexes $z_1 = e^{-\frac{\pi}{4}}$ et $z_2 = e^{\frac{3i\pi}{4}}$ (qui sont bien respectivement égaux aux valeurs calculées sous forme algébrique).

Cas général des racines n-ièmes

Proposition 5.4.4. *L'équation $z^n = a$ admet n racines distinctes dans $\mathbf{C}$, appelées racines n-ièmes de a. Si θ est un argument de a, alors l'ensemble des racines n-ièmes de a est l'ensemble des nombres complexes de module $\sqrt[n]{|a|}$ et d'arguments $\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}$, avec $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$.*

Les images de ces n racines n-ièmes sont les sommets d'un polygone régulier à n sommets inscrits dans le cercle de centre O et de rayon $\sqrt[n]{|a|}$.

Racines n-ièmes de 1 On désigne par $\mathbf{U}_n \subset \mathbf{U}$ l'ensemble des racines n-ièmes de 1. Par exemple :

$$\mathbf{U}_2 = \{-1, 1\}, \qquad \mathbf{U}_3 = \{1, j, j^2\}, \qquad \mathbf{U}_4 = \{1, -1, i, -i\},$$

où $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$.

Proposition 5.4.5. *Avec les notations ci-dessus, on a :* $\mathbf{U}_n = \{e^{\frac{2ik\pi}{n}} : k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}\}$.

Proposition 5.4.6. *La somme des racines n-ièmes est nulle.*

En particulier, on a : $1 + j + j^2 = 0$.

Equation du second degré

Théorème 5.4.7. *Soient a, b et c trois nombres complexes tels que $a \neq 0$ et $z \in \mathbf{C}$. Alors, l'équation $az^2 + bz + c = 0$ admet deux solutions données par :*

$$z_1 = \frac{-b-\delta}{2a} \qquad et \qquad z_2 = \frac{-b+\delta}{2a},$$

où δ est une racine carrée de $\Delta := b^2 - 4ac$.

Remarque 5.4.8.
1. On retrouve les cas particuliers connus où a, b et c sont réels et où le discriminant Δ est réel (positif ou négatif).
2. Une équation de degré deux a toujours deux solutions dans $\mathbf{C}$ distinctes ou confondues.

On peut également étendre l'étude à des équations de degré supérieur à 2 à coefficients réels. Pour cela, on notera que si $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sont $(n+1)$ nombres réels et si z_0 est solution de l'équation $a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_0 = 0$, alors $\overline{z_0}$ est aussi solution de la même équation.

5.5 Applications à la trigonométrie

On peut redémontrer les formules de trigonométrie classiques, comme les formules d'addition, en développant l'égalité $e^{ia}e^{ib} = e^{i(a+b)}$ et en identifiant parties réelles et imaginaires.

Expression de $\cos(nx)$ et $\sin(nx)$ en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(x)$

Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ et pour tout $x \in \mathbf{R}$, on remarque que

$$\cos(nx) = \mathrm{Re}(e^{inx}) = \mathrm{Re}((\cos(x)+i\sin(x)))^n) \text{ et } \sin(nx) = \mathrm{Im}(e^{inx}) = \mathrm{Im}((\cos(x)+i\sin(x)))^n).$$

Linéarisation de $\cos^n(x)$ et $\sin^n(x)$

Linéariser $\cos^n(x)$ et $\sin^n(x)$ consiste à exprimer ces deux quantités comme une combinaison linéaire de $\cos(kx)$ et $\sin(kx)$. Un tel procédé est utile, en particulier, pour déterminer des primitives ou calculer des dérivées.