COURS DE MATHEMATIQUES (MATH 2)

Licence MSPI, $1^{\text{ère}}$ année

Semestre 1

N. CHENAVIER

Table des matières

Chapitre 1

Rudiments de théorie des ensembles

Sommaire

1.1 Premières définitions

Définition 1.1.1. *On appelle* ***ensemble*** *toute collection d'objets satisfaisant un certain nombre de propriétés. Chacun de ces objets est appelé un élément de cet ensemble.*
- *Si x est un élement de l'ensemble E, on dit que x appartient à E et l'on note $x \in E$.*
- *Sinon, on note $x \notin E$.*

Exemple 1.1.2. Si l'on désigne par E l'ensemble des entiers positifs inférieurs ou égaux à 10, alors $7 \in E$ mais $12 \notin E$.

Parmi les ensembles classiques, on peut citer :
- $\mathbf{N}$: l'ensemble des entiers naturels ;
- $\mathbf{Z}$: l'ensemble des entiers relatifs ;
- $\mathbf{D}$: l'ensemble des nombres décimaux ;
- $\mathbf{Q}$: l'ensemble des nombres rationnels ;
- $\mathbf{R}$: l'ensemble des nombres réels ;
- $\mathbf{C}$: l'ensemble des nombres complexes.

On admet l'existence d'un ensemble n'ayant aucun élément. Cet ensemble s'appelle l'**ensemble vide** et est noté $\emptyset$. Pour décrire un ensemble, on procède en général de deux façons :

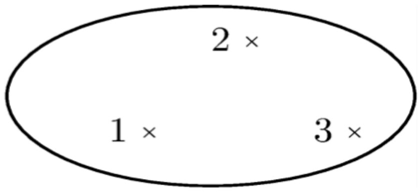

FIGURE 1.1 – Diagramme de Venn de l'ensemble $\{1, 2, 3\}$

- *Par extension* : il s'agit d'énumérer tous les éléments de l'ensemble. L'ensemble s'écrit alors comme une accolade de tous ses élements. Par exemple, si E désigne l'ensemble des entiers positifs inférieurs ou égaux à 10, on a :

  $$E = \{0, 1, 2, \dots, 10\}.$$

  En pratique, on n'utilise une telle description que pour les ensembles de petite taille.
- *Par compréhension* : il s'agit de décrire l'ensemble à travers une (ou plusieurs) propriété(s). Par exemple, si E désigne l'ensemble des entiers positifs inférieurs ou égaux à 10, on a :

  $$E = \{n \in \mathbf{N} | n \leq 10\}.$$

Remarque 1.1.3. Lorsque l'on définit un ensemble par extension, un élément donné ne doit figurer qu'une seule fois. Par exemple, on n'écrira pas $\{1, 2, 3, 1\}$ mais $\{1, 2, 3\}$.

Diagrammes de Venn Dans certains cas, on peut représenter un ensemble par un graphique de forme "patatoïde", appelé diagramme de Venn. Un diagramme de Venn de l'ensemble $E = \{1, 2, 3\}$ est représenté dans la figure 1.1.

On présente ci-dessous des relations et opérations sur les ensembles.

1.2 Inclusion et égalité

Inclusion

Définition 1.2.1. *Soient A et B deux ensembles. On dit que A est* ***inclus*** *dans B si chaque élément de A est un élément de B. On note alors $A \subset B$. On dit aussi "A est contenu dans B" ou "A est une partie de B" ou "A est un sous-ensemble de B".*

Exemple 1.2.2.
1. $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q}$;
2. $\{n \in \mathbf{N} | n \leq 10\} \subset \mathbf{R}_+$.
3. $\{x \in \mathbf{R} | x^2 \leq 4\} \subset \{x \in \mathbf{R} | x \leq 2\}$.

Remarque 1.2.3. Soient A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E. Alors

$$A \subset B \iff \forall x \in E, (x \in A \Rightarrow x \in B).$$

En particulier,

$$A \not\subset B \iff \exists x \in E, (x \in A \text{ et } x \notin B).$$

Proposition 1.2.4. *Soient A, B, C trois ensembles. Alors :*
1. *$A \subset A$ (réflexivité) ;*
2. *si $A \subset B$ et $B \subset C$ alors $A \subset C$ (transitivité).*

Egalité

Définition 1.2.5. *On dit que deux ensembles A et B sont* ***égaux*** *lorsqu'ils ont exactement les mêmes éléments. On note alors $A = B$.*

Remarque 1.2.6.
1. Soient A et B deux ensembles. Alors $A = B$ si et seulement si $A \subset B$ et $B \subset A$ (antisymétrie).
2. Soient A et B deux ensembles. Alors
$$A = B \iff \forall x \in E, (x \in A \Leftrightarrow x \in B).$$

En pratique, pour montrer que deux ensembles A et B sont égaux, on procède le plus souvent par double inclusion. En d'autres termes, on montrer que $A \subset B$ et $B \subset A$.

Exemple 1.2.7. On a $\{n \in \mathbf{N} | n^2 \leq 4\} = \{1, 2\}$.

1.3 Intersection, réunion, produit

Intersection et réunion

Définition 1.3.1. *Soient A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E.*
- *L'ensemble $\{x | x \in A \text{ et } x \in B\}$ est appelé l'****intersection*** *des ensembles A et B et est noté $A \cap B$.*
- *L'ensemble $\{x | x \in A \text{ ou } x \in B\}$ est appelé la* ***réunion*** *des ensembles A et B et est noté $A \cup B$.*

Remarque 1.3.2.
1. Si $A \cap B = \emptyset$, on dit que A et B sont disjoints (ne pas confondre avec distinct qui est la négation de égal).
2. Le "ou" apparaissant dans réunion $A \cup B$ est un "ou" inclusif et non exclusif.

Exemple 1.3.3. Considérons les ensembles A et B définis par $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ et $B = \{5, 10\}$. La réunion et l'intersection de ces deux ensembles sont donnés par $A \cup B = \{2, 4, 5, 6, 8, 10\}$ et $A \cap B = \{10\}$.

Remarque 1.3.4. Soient A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E. Alors
1. $A \cap \emptyset = \emptyset$ et $A \cup \emptyset = A$;
2. $A \cap B \subset A$ et $A \cap B \subset B$;
3. $A \subset A \cup B$ et $B \subset A \cup B$;
4. $A \cup B = A$ si et seulement si $B \subset A$;
5. $A \cap B = \emptyset$ si et seulement si $A \subset B$.

Proposition 1.3.5. *Les opérations réunion et intersection sont commutatives. En d'autres termes, pour tous sous-ensembles A, B, C d'un ensemble E, on a :*
1. *$A \cup B = B \cup A$ et $A \cap B = B \cap A$ (commutativité) ;*
2. *$(A \cup B) \cap C = A \cup (B \cup C)$ et $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ (associativité).*

Proposition 1.3.6. *L'opération réunion est distributive par rapport à l'intersection et l'opération intersection est distributive par rapport à la réunion. En d'autres termes, pour tous sous-ensembles A, B, C d'un ensemble E, on a :*
1. *$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$;*
2. *$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$.*

Produit Si $x \in A$ et $y \in B$, on peut fabriquer un nouvel élément appelé couple et noté (x, y), caractérisé par le fait que $(x, y) = (z, t)$ si et seulement si $x = z$ et $y = t$.

Définition 1.3.7. *Soient A et B deux ensembles. On appelle **produit cartésien** de A et de B l'ensemble noté $A \times B$ et défini par :*

$$A \times B = \{(x, y) | x \in A \text{ et } y \in B\}.$$

Exemple 1.3.8.

1. Si $A = \{0, 1, 2\}$ et $B = \{4, 5\}$, alors

$$A \times B = \{(0, 4), (0, 5), (1, 4), (1, 5), (2, 4), (2, 5)\}.$$

2. Si $A = [0, 1]$ et $B = [0, 3]$, alors $A \times B = [0, 1] \times [0, 3]$. En particulier, $A \times B$ est un rectangle.
3. Si $A = \{0\}$ et $B = \mathbf{R}$, alors $A \times B = \{0\} \times \mathbf{R}$. En particulier, $A \times B$ est l'axe des ordonnées dans le plan $\mathbf{R}^2 = \mathbf{R} \times \mathbf{R}$.

Remarque 1.3.9. Etant donnés deux éléments x, y d'un ensemble E, on veillera à bien distinguer les notions de *couple* et de *paire*.

- Le couple x, y, noté (x, y), est un élément du produit cartésien $E^2 := E \times E$. En particulier l'ordre entre x et y a une importance : on a $(x, y) \neq (y, x)$ (sauf si $x = y$).
- La paire x, y, notée $\{x, y\}$, est un sous-ensemble de l'ensemble E. En particulier, l'ordre entre x et y n'a pas d'importance : on a $\{x, y\} = \{y, x\}$.

1.4 Complémentaire et différence

Complémentaire

Définition 1.4.1. *Soient E un ensemble et A un sous-ensemble de E. L'ensemble $\{x | x \in E \text{ et } x \notin A\}$ s'appelle le **complémentaire** de A dans E. On note alors $\complement_E A$.*

Remarque 1.4.2. Soit A un sous-ensemble d'un ensemble E. Alors $\complement_E(\complement_E A) = A$.

Exemple 1.4.3.

1. Soit $E = \{1, 2, \ldots, 10\}$ et $A = \{5, 10\}$. Alors le complémentaire de A est $\complement_E A = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9\}$.
2. Soit $E = \mathbf{N}$ et A l'ensemble des nombres pairs. Alors le complémentaire de A est l'ensemble des entiers impairs.

Proposition 1.4.4. *Soient A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E. Alors*

$$B = \complement_E A \iff A \cap B = \emptyset \text{ et } A \cup B = E.$$

Théorème 1.4.5. *(Formules de De Morgan) Soient A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E. Alors*

$$\complement_E(A \cap B) = (\complement_E A) \cup (\complement_E B) \quad \text{et} \quad \complement_E(A \cup B) = (\complement_E A) \cap (\complement_E B)$$

Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïtés sur l'ensemble E, on note plus simplement A^c ou $\overline{A}$ le complémentaire du sous-ensemble A dans l'ensemble E.

Différence

Définition 1.4.6. *Soient A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E. On appelle ensemble A privé de l'ensemble B, ou encore* ***différence*** *de A et de B, l'ensemble suivant :*

$$A \setminus B = \{x | x \in A \text{ et } x \notin B\}.$$

En d'autres termes, on a $A \setminus B = A \cap \complement_E B$.

Remarque 1.4.7.
1. Lorsque A est un sous-ensemble de E, l'ensemble $E \setminus A$ est égal au complémentaire de A dans E.
2. $A \setminus B = A \cap \complement_E B$.
3. $A \subset B$ si et seulement si $A \setminus B = \emptyset$.

1.5 Ensemble des parties d'un ensemble

Soit E un ensemble. On désigne par $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E (c'est-à-dire de ses sous-ensembles). En d'autres termes,

$$\mathcal{P}(E) = \{A | A \subset E\}.$$

Exemple 1.5.1. Si $E = \{1, 2, 3\}$ alors $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$.

Remarque 1.5.2. Pour tout ensemble E non vide, on a $\emptyset \in \mathcal{P}(E)$ et $E \in \mathcal{P}(E)$.

1.6 Cardinal d'un ensemble fini

Définition 1.6.1. *Soit E un ensemble ayant un nombre fini d'éléments. On appelle* ***cardinal*** *de E le nombre d'éléments de E. On note ce nombre $|E|$.*

Exemple 1.6.2. Si $A = \{1, 3, 5, 7\}$ alors $|A| = 4$.

On énonce ci-dessous des propriétés sur les cardinaux pour toutes les notions que nous avons rencontrées : réunion, intersection, produit, complémentaire et ensemble des parties.

Proposition 1.6.3. *(Cardinal d'une réunion, intersection) Soient A et B deux ensembles ayant un nombre fini d'éléments. Alors $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.*

Remarque 1.6.4. En particulier, on a $|A \cup B| \geq \max\{|A|, |B|\}$ et $|A \cap B| \leq \min\{|A|, |B|\}$.

Proposition 1.6.5. *(Cardinal d'un produit) Soient A et B deux ensembles ayant un nombre fini d'éléments. Alors $|A \times B| = |A| \times |B|$.*

Proposition 1.6.6. *(Cardinal du complémentaire) Si E est un ensemble ayant un nombre fini d'éléments, alors il en est de même pour tout sous-ensemble A. De plus, $|\complement_E A| = |E| - |A|$.*

Proposition 1.6.7. *(Cardinal de l'ensemble des parties) Soit E un ensemble ayant un nombre fini d'éléments. Alors $|\mathcal{P}(E)| = 2^{|E|}$.*

Exemple 1.6.8. Si $E = \{1, 2, 3\}$, nous avons vu dans la section précédente que $|\mathcal{P}(E)| = 8$. En particulier, on retrouve bien que $|\mathcal{P}(E)| = 2^3$.

1.7 Ensemble des entiers naturels

On ne donne pas de construction de l'ensemble **N**, bien que celle-ci puisse se faire dans le cadre de la théorie des ensembles. Il faut, pour cela, introduire l'axiome d'existence d'un ensemble infini. L'ensemble **N** peut être caractérisé par l'existence d'un élément initial (zéro) et pour chaque élément n d'un successeur $n+1$ (distinct de $0, 1, \dots n$), et pour chaque élément différent de zéro d'un prédécesseur ainsi que par le principe de récurrence.

L'ensemble $\mathbf{N} := \{0, 1, 2, \dots\}$ est muni d'une loi d'addition et de multiplication et d'un ordre. Une loi moins évidente qui le caractérise essentiellement est la suivante :

Théorème 1.7.1. *(principe de récurrence) Soit S un sous-ensemble de* **N** *contenant 0 et tel que :*

$$\forall n \in \mathbf{N}, n \in S \Longrightarrow (n+1) \in S.$$

Alors $S = \mathbf{N}$.

L'utilité de ce théorème est de permettre de vérifier une propriété $\mathcal{P}(n)$ pour tout entier naturel en montrant que $\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$ et en vérifiant $\mathcal{P}(0)$.

Exemple 1.7.2. On souhaite montrer que $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$. Pour cela, on désigne par $\mathcal{P}(n)$ cette formule et on pose $S = \{n \in \mathbf{N} | \mathcal{P}(n)\}$. On effectue alors une récurrence sur n.

Initialisation : on voit que $\mathcal{P}(0)$ est vraie puisque $\sum_{k=0}^{0} k = 0 = \frac{0(0+1)}{2}$.

Hérédité : supposons que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. On a :

$$\sum_{k=0}^{n+1} k = (n+1) + \sum_{k=0}^{n} k.$$

Puisque $\mathcal{P}(n)$ est vraie (hypothèse de récurrence), on sait que $\sum_k = 0^n k = \frac{n(n+1)}{2}$. On en déduit que

$$\sum_{k=0}^{n+1} k = (n+1) + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

L'équation ci-dessus montre que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. Le théorème 1.7.1 permet de conclure que $S = \mathbf{N}$ et par conséquent que, pour tout entier n, la formule $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

La récurrence que nous venons de décrire s'appelle le principe de *récurrence simple* (ou principe de récurrence faible) : sous réserve qu'on ait montré l'initialisation et l'implication $\mathcal{P}_n \Longrightarrow \mathcal{P}_{n+1}$, on en déduit que la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout n (à partir du rang de l'initialisation). Il peut arriver, pour l'hérédité, qu'on ait besoin de supposer non seulement le rand d'ordre n mais aussi d'autres rangs d'ordre inférieur. On distingue ci-dessous deux autres types de récurrence.

- Principe de *récurrence double* : pour l'hérédité, on suppose que la propriété est vraie à un ordre ainsi qu'à l'ordre qui le précède. On est alors amené à utiliser le principe de récurrence suivant. Soit $\mathcal{P}(n)$ une propriété définie sur **N**. Si $\mathcal{P}(0)$, $\mathcal{P}(1)$ sont vraies et si ($\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1) \Longrightarrow \mathcal{P}(n+2)$), alors $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout n. [1]

1. Le principe de récurrence double parait plus fort que la récurrence simple, puisque l'on a une hypothèse supplémentaire à notre disposition. En fait, la récurrence double est équivalente puisque cela revient à démontrer ($\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$) par récurrence simple.

- Principe de *récurrence forte* : la récurrence précédente peut être généralisée à plus d'hypothèses : 3, 4, ... Tous ces principes apparaissent comme des cas particuliers du principe de récurrence suivant, qui permet, pour démontrer la propriété au rang suivant de la supposer vraie pour tous les rangs inférieurs. On a une version plus forte de l'hérédité. Soit $\mathcal{P}(n)$ une propriété définie sur $\mathbf{N}$. Si $\mathcal{P}(0)$ est vraie et si $(\forall k \leq n, \mathcal{P}(k)) \Longrightarrow \mathcal{P}(n+1)$, alors $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout n.[2]

2. Là aussi, la récurrence forte est en fait une conséquence de la récurrence simple puisqu'il s'agit de montrer la récurrence (simple) : $(\forall k \leq n, \mathcal{P}(k))$.

Chapitre 2

Applications

Sommaire

2.1 Premières définitions

Définition 2.1.1. *On appelle **relation** (binaire) d'un ensemble E vers un ensemble F, tout sous-ensemble $\mathcal{R}$ de $E \times F$.*

- *Les ensembles $E, F, \mathcal{R}$ sont alors appelées respectivement l'**ensemble de départ**, l'**ensemble d'arrivée** et le **graphe** de cette relation.*
- *Etant donné $(x, y) \in E \times F$, si le couple $(x, y) \in \mathcal{R}$, on dit que x est **en relation** avec y, ou encore que x est relié à y. On note alors $x\mathcal{R}y$.*

Exemple 2.1.2.
1. Soient $E = \{1, 2, 3\}$, $F = \{1, 2\}$ et $\mathcal{R} = \{(1, 1), (1, 2), (3, 2)\}$. En d'autres termes, $1\mathcal{R}1$, $1\mathcal{R}2$ et $3\mathcal{R}2$. Alors $\mathcal{R}$ est une relation de E vers F.
2. Soient $E = \mathbf{Z}$, $F = \mathbf{Z}$ et $\mathcal{R}$ définie par $x\mathcal{R}y \iff y - x$ est pair. Alors $\mathcal{R}$ est une relation de $\mathbf{Z}$ vers $\mathbf{Z}$.
3. Soient $E = \mathbf{R}$, $F = \mathbf{R}$ et $\mathcal{R}$ définie par $x\mathcal{R}y \iff y \leq x$. Alors $\mathcal{R}$ est une relation de $\mathbf{R}$ vers $\mathbf{R}$.

Deux relations sont dites égales lorsqu'elles ont le même ensemble de départ, le même ensemble d'arrivée et le même graphe. En pratique, il est parfois utile de représenter $\mathcal{R}$ sous la forme d'un diagramme sagital.

Dans ce chapitre, on s'intéressera à un cas particulier de relation : les applications. D'autres exemples de relations seront présentés dans le chapitre suivant.

Définition 2.1.3. *Soient E et F deux ensembles.*

- *On appelle **fonction** de E dans F toute relation f de E vers F telle que chaque élément de E soit en relation par f avec au plus un élément de F.*
- *On appelle **application** de E dans F toute fonction f de E vers F telle que chaque élément de E soit en relation par f avec exactement un élément de F. En d'autres termes, $\forall x \in E, \exists! y \in F : xfy$.*

On note $y = f(x)$ lorsque xfy.

Une fonction (et en particulier une application), se note sous la forme $f : E \to F, x \mapsto f(x)$, ou encore

$$\begin{aligned} f :& E \to F \\ & x \mapsto y = f(x). \end{aligned}$$

Lorsque $y = f(x)$, on dit que y est **l'image** de x par f et que x est **un antécédant** de y par f.

Exemple 2.1.4.
1. La quantité $\mathcal{R}$ définie par $1\mathcal{R}1$, $1\mathcal{R}2$ et $3\mathcal{R}2$ est une relation de $\{1, 2, 3\}$ vers $\{1, 2\}$ mais n'est pas une fonction.
2. La relation f définie par $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, x \mapsto \frac{1}{x}$ est une fonction mais pas une application.
3. La fonction f définie par $f : \mathbf{R}^* \to \mathbf{R}, x \mapsto \frac{1}{x}$ est une application.
4. Soit E un ensemble. La fonction

$$\begin{aligned} \mathrm{Id}_E :& E \to E \\ & x \mapsto x \end{aligned}$$

est une application de E vers E. On l'appelle **application identité** de l'ensemble E.[1]

Deux applications f et g sont égales si et seulement si elles ont même ensemble de départ, même ensemble d'arrivée et si, pour tout élément x de l'ensemble de départ, on a $f(x) = g(x)$. On note alors $f = g$. Par exemple, les applications f et g définies par

$$\begin{aligned} f :& \mathbf{R} \setminus \{-1\} \to \mathbf{R} \\ & x \mapsto \frac{x^2 - 1}{x + 1} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} g :& \mathbf{R} \setminus \{-1\} \to \mathbf{R} \\ & x \mapsto x - 1 \end{aligned}$$

sont égales. A contrario, l'application f n'aurait pas été égale à l'application g si, comme ensemble de départ pour g, on avait pris $\mathbf{R}$ au lieu de $\mathbf{R} \setminus \{-1\}$.

Il est d'usage de désigner par B^A l'ensemble des applications de A dans B. En particulier, $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$ désigne l'ensemble des applications de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ et $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ désigne l'ensemble des suites à valeurs réelles.

Restriction et prolongement

1. L'application identité jouera un rôle crucial dans la suite dans ce chapitre, en particulier pour la notion de bijection.

Définition 2.1.5. *Soient $f : E \to F$ une application et $A \subset E$ un sous-ensemble de E. On appelle* ***restriction*** *de f à A l'application notée $f_{|A}$ définie par :*

$$\begin{aligned} f : & A \to F \\ & x \mapsto f(x). \end{aligned}$$

Définition 2.1.6. *Soient $f : E \to F$ une application et E' un ensemble contenant E, c'est-à-dire tel que $E \subset E'$. On appelle* ***prolongement*** *de f à E toute application $g : E' \to F$ telle que $\forall x \in E,\ g(x) = f(x)$.*

La restriction d'une application à un ensemble est unique. En revanche, il existe plusieurs prolongements possibles d'une application.

Composée de deux applications

Définition 2.1.7. *Soient $f : E \to F$ et $g : F' \to G$ deux applications telles que $F \subset F'$. On appelle* ***composée*** *(ou composition) de f par g l'application de E vers G notée $g \circ f$ définie par*

$$\forall x \in E,\ g \circ f(x) = g(f(x)).$$

Exemple 2.1.8. Considérons les fonctions $f : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+, x \mapsto x+1$ et $g : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+, x \mapsto \sqrt{x}$. Alors, $\forall x \in \mathbf{R}_+, g \circ f(x) = \sqrt{x+1}$ et $f \circ g(x) = \sqrt{x} + 1$.

Remarque 2.1.9. Pour toute application $f : E \to F$, on a $f \circ \mathrm{Id}_E = f$ et $\mathrm{Id}_F \circ f = f$.

Proposition 2.1.10. *(Associativité de la composition) Soient $f : E \to F$, $g : F \to G$ et $h : G \to H$ trois applications. Alors $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$.*

2.2 Image directe et image réciproque

Définition 2.2.1. *Soit f une application de E vers F et A un sous-ensemble de E. On appelle* ***image directe*** *de l'ensemble A par f l'ensemble, noté $f(A)$, des images des éléments de A par f. En d'autres termes,*

$$f(A) = \{f(x) | x \in A\}.$$

Autrement dit, pour tout $y \in F$, on a $y \in f(A) \iff \exists x \in A, y = f(x)$.

Exemple 2.2.2.
1. Soit $f : \{1,2,3\} \to \{1,2,3,4\}$ définie par $f(1) = 4, f(2) = 3, f(3) = 2$ et $A = \{1,3\}$. Alors $f(\{1,3\}) = \{2,4\}$.
2. Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, x \mapsto x^2$ et $A = [-2,3]$. Alors $f([-2,3]) = [0,9]$.

Définition 2.2.3. *Soit f une application de E vers F et B un sous-ensemble de F. On appelle* ***image récriproque*** *de l'ensemble B par f l'ensemble, noté $f^{-1}(B)$, des antécédants des éléments de B par f. En d'autres termes*

$$f^{-1}(B) = \{x \in E | f(x) \in B\}.$$

Autrement dit, pour tout $x \in E$, on a $x \in f^{-1}(B) \iff f(x) \in B$.

Exemple 2.2.4.
1. Soit $f : \{1,2,3\} \to \{1,2,3,4\}$ définie par $f(1) = 4, f(2) = 3, f(3) = 2$ et $B = \{1,3\}$. Alors $f^{-1}(\{1,3\}) = \{2\}$.

2. Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, x \mapsto x^2$ et $B = [0, 9]$. Alors $f^{-1}([0, 9]) = [-3, 3]$.

Proposition 2.2.5. *Soit $f : E \to F$ une application.*

1. *Pour tous sous-ensembles A et B de l'ensemble E, on a :*
   - $A \subset B \Longrightarrow f(A) \subset f(B)$;
   - $f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B)$;
   - $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.
2. *Pour tous sous-ensembles A' et B' de l'ensemble F, on a :*
   - $A' \subset B' \Longrightarrow f^{-1}(A') \subset f^{-1}(B')$;
   - $f^{-1}(A' \cup B') \subset f^{-1}(A') \cup f^{-1}(B')$;
   - $f^{-1}(A' \cap B') \subset f^{-1}(A') \cap f^{-1}(B')$;
   - $f^{-1}(\complement_F A') = \complement_E f^{-1}(A')$.
3. *Pour tout sous-ensemble A de E et pour tout sous-ensemble A' de F, on a $A \subset f^{-1}(f(A))$ et $f(f^{-1}(A')) \subset A'$.*

Les inclusions apparaissant dans la proposition ci-dessus sont au sens large (c'est-à-dire, selon l'application f et les sous-ensembles considérés, on peut avoir des égalités). En toute généralité, cependant, il ne s'agit bien que d'inclusions. Par exemple, si $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, x \mapsto x^2$ et $A' = [-1, 9]$, on a $f(f^{-1}([-1, 9])) = [0, 9] \subset [-1, 9]$ mais $f(f^{-1}([-1, 9])) \neq [-1, 9]$.

2.3 Injections, surjections, bijections

Il est naturel, disposant d'une fonction f, d'étudier les équations du type $f(x) = f(y)$ ou encore $y = f(x)$. Cela conduit à la notion d'application injective ou surjective.

Définition 2.3.1. *Soit $f : E \to F$ une application. On dit que :*

1. *f est **injective** si tout élément de F admet par f au plus un antécédant, c'est-à-dire :*
$$\forall (x, x') \in E^2, f(x) = f(x') \Longrightarrow x = x';$$
2. *f est **surjective** si tout élément de F admet par f au moins un antécédant, c'est-à-dire :*
$$\forall y \in F, \exists x \in E, y = f(x);$$
3. *f est **bijective** si elle est injective et surjective, c'est-à-dire tout élément de F admet par f exactement un antécédant, c'est-à-dire :*
$$\forall y \in F, \exists! x \in E, y = f(x).$$

Exemple 2.3.2.
1. L'application $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, x \mapsto x^2$ n'est ni injective ni surjective.
2. L'application $g : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}, x \mapsto x^2$ est injective mais pas surjective.
3. L'application $\sin : \mathbf{R} \to [-1, 1]$ est surjective mais pas injective.
4. L'application $\exp : \mathbf{R} \to \mathbf{R}_+^*$ est injective et surjective, donc bijective.

D'après les exemples ci-dessus, on se rend compte que l'espace de départ et l'espace d'arrivée jouent un rôle essentiel pour savoir si l'application est injective et/ou surjective. La proposition suivante donne une caractérisation immédiate d'une fonction surjective.

Proposition 2.3.3. *Une application $f : E \to F$ est surjective si et seulement si $f(E) = F$.*

La proposition suivante traite de l'injectivité et de la surjectivité pour une composée d'applications.

Proposition 2.3.4. *Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications.*

1. *Si f et g sont injectives alors $g \circ f$ est injective.*
2. *Si f et g sont surjectives alors $g \circ f$ est surjective.*
3. *Si f et g sont bijectives alors $g \circ f$ est bijective.*

Une sorte de réciproque du résultat ci-dessus est présentée dans la proposition suivante.

Proposition 2.3.5. *Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications.*

1. *Si $g \circ f$ est injective alors f est injective.*
2. *Si $g \circ f$ est surjective alors g est surjective.*

Cas d'une application d'un ensemble fini vers un ensemble fini

Proposition 2.3.6. *Soient E, F deux ensembles ayant un nombre fini d'éléments et soit $f : E \to F$ une application.*

1. *Si f est injective, alors $|E| \leq |F|$.*
2. *Si f est surjective, alors $|E| \geq |F|$.*
3. *Si f est bijective, alors $|E| = |F|$.*

En particulier, la proposition ci-dessus reflète bien la nature d'une application. L'application est injective si son espace de départ est "tellement petit" qu'il s'injecte dans son espace d'arrivée qui est plus grand. L'application est surjective si son espace de départ est "tellement grand" qu'il atteint toutes les valeurs de l'espace d'arrivée. La fonction est bijective si les espaces de départ et d'arrivée sont "de même taille".

Le résultat suivant fournit des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une fonction soit bijective.

Théorème 2.3.7. *Soient E, F deux ensembles ayant un* ***nombre fini d'éléments*** *et soit $f : E \to F$ une application. Alors, les assertions suivantes sont équivalents :*

(i) f est injective ;

(ii) f est surjective ;

(iii) f est bijective.

L'hypothèse de finitude des espaces de départ et d'arrivée E et F est essentiel : le théorème ci-dessus n'est plus vrai si on ne suppose pas que E et F soient des ensembles finis.

2.4 Applications réciproques

Dans cette section, on se limite au cas des fonctions bijectives d'un ensemble E (fini ou non fini) à valeurs dans un ensemble F (fini ou non fini).

Définition 2.4.1. *Soit $f : E \to F$ une application bijective. On appelle* ***application réciproque*** *de f l'application, notée $f^{-1} : F \to E$, définie sur F à valeurs dans E et qui, à tout élément $y \in F$ associe son unique antécédant par f.*

En d'autres termes, sous réserve que f soit bijective, on a :

$$\forall x \in E, \forall y \in F, x = f^{-1}(y) \Longleftrightarrow y = f(x).$$

Exemple 2.4.2. 1. L'application réciproque de $f : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+, x \mapsto x^2$ est $f^{-1} : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+, y \mapsto \sqrt{y}$.

2. L'application réciproque de $\exp : \mathbf{R} \to \mathbf{R}_+^*$ est $\ln : \mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}$.

Remarque 2.4.3. 1. Si $f : E \to F$ est bijective, alors $f^{-1} : F \to E$ est également bijective.

2. Si $f : E \to F$ est une application telle que $E, F \subset \mathbf{R}$, alors le graphe de f^{-1} est le symétrique du graphe de f par la première bissectrice du plan $\mathbf{R}^2$.
3. Si $f : E \to F$ est bijective, alors :

$$f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_F, \quad f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_E \quad \text{et} \quad (f^{-1})^{-1} = f.$$

Proposition 2.4.4. *Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications bijectives. Alors $g \circ f$ est bijective et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.*

Remarque 2.4.5. 1. On a rencontré à deux reprises la notation f^{-1}.

- La première est apparue dans la section 2.2 et est une opération sur des ensembles : si $B \subset F$, alors $f^{-1}(B) = \{x \in E | f(x) \in B\}$. En particulier, $f^{-1}(B)$ a toujours un sens quelle que soit la nature de l'application f (qu'elle soit bijective ou non).
- La second aparait dans cette section et est une opération sur des éléments : si f est bijective, alors f^{-1} existe et désigne son application réciproque. Si $y \in F$, alors $f^{-1}(y)$ est l'unique antécédant de y. En particulier, $f^{-1}(y)$ n'a de sens que si f est bijective.

2. Dans le cas où f est bijective, on a $f^{-1}(B) = (f^{-1})(B)$.

Cas d'une application continue et strictement monotone Le théorème (fondamental) suivant fournit un procédé pratique pour montrer qu'une fonction est bijective.

Théorème 2.4.6. *(Théorème de la bijection) Soit f une application continue et strictement monotone sur un intervalle I, d'extrémités a et b finis ou infinis. L'image $f(I)$ de I par f est un intervalle de même nature que I (ouvert, fermé, semi-ouvert), d'extrémités $\lim_a f$ et $\lim_b f$. De plus, f est une bijection de I sur son image $f(I)$.*

Ce théorème sera abondamment utilisé dans la section suivante.

Exemple 2.4.7. La fonction $f : [-2, 2] \to \mathbf{R}, x \mapsto x^3$ étant bien monotone, on retrouve bien le fait que $f([-2, 2]) = [-8, 8] = [f(-2), f(2)]$.

Remarque 2.4.8. 1. L'hypothèse de stricte monotonie est nécessaire. Par exemple, si f est la fonction $f : [-1, 2] \to \mathbf{R}, x \mapsto x^2$, on a $f([-1, 2]) = [0, 4] \neq [f(-1), f(2)]$.

2. En pratique, pour montrer que l'hypothèse de stricte monotonie d'une fonction dérivable est satisfaite dans le théorème 2.4.6, on montre que la dérivée de la fonction ne s'annule pas et est de signe constant.

Dans le cas où f est dérivable (et bijective), il est naturel de se demander s'il en est de même pour son application réciproque. Le théorème suivant donne une réponse.

Théorème 2.4.9. *Soit $f : I \to J$ une bijection d'un intervalle I sur un intervalle J et x_0 un élément de I. Si f est dérivable en x_0 et si $f'(x_0) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en $y_0 = f(x_0)$ et*

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

Remarque 2.4.10. Si la bijection $f : I \to J$ est dérivable en x_0 et si $f'(x_0) = 0$, alors f^{-1} n'est pas dérivable en $y_0 = f(x_0)$ et sa représentation graphique présente au point d'abscisse y_0 une tangente parallèle à l'axe des ordonnées.

Exemple 2.4.11.

1. Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, x \mapsto x^3 + x + 1$. On souhaite calculer $(f^{-1})'(1)$. Déjà, f^{-1} existe puisque f est bijective : il s'agit d'une conséquence du théorème de la bijection et du fait que la dérivée de f est strictement positive (puisque $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$). Posons $x_0 := f^{-1}(1)$. D'après le théorème 2.4.9, on obtient que :
$$(f^{-1})'(1) = \frac{1}{3x_0^2 + 1}.$$
Pour calculer x_0, on remarque que
$$x = f^{-1}(1) \iff f(x) = 1 \iff x^3 + x + 1 = 1 \iff x = 0.$$
On a donc $x_0 = 0$, ce qui donne $(f^{-1})'(1) = \frac{1}{3\times 0^2+1} = 1$.
2. Si $f : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+, x \mapsto x^2$, on retrouve en utilisant le fait que $(x^2)' = 2x$ la formule bien connue $(\sqrt{y})' = \frac{1}{2\sqrt{y}}$.

L'intérêt du théorème 2.4.9 est qu'il permet de calculer la dérivée de la fonction réciproque en un point sans qu'il soit nécessaire de calculer entièrement la fonction réciproque.

2.5 Fonctions circulaires réciproques

Dans cette section, on introduit trois fonctions usuelles. Ces dernières sont définies comme des fonctions réciproques de fonctions trigonométriques. Toutes s'appuieront sur le théorème de la bijection (théorème 2.4.6) pour être bien définies.

Fonction arccos

On sait que la fonction $\cos : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ n'est ni injective (puisqu'elle est périodique) ni surjective (puisqu'elle est à valeurs dans $[-1, 1]$). Pour être amené à considérer une bijection, il est nécessaire de se restreindre à un espace sur lequel la fonction cos est injective, et prendre comme espace d'arrivée $[-1, 1]$. Un espace de départ naturel est $[0, \pi]$ puisque, sur cet ensemble, la fonction cosinus est strictement décroissante, donc injective. Puisque, de plus, cos est continue sur l'intervalle $[0, \pi]$, on déduit du théorème de la bijection que $\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$ est une bijection. Il y a sens alors à parler de fonction réciproque.

Définition 2.5.1. *On appelle* $\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$ *l'application réciproque de la fonction* $\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$.

Une représentation du graphe de l'application arccos (le graphe est le symétrique de celui de $\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$ par rapport à la première bissectrice) est fournie dans la figure 2.1.

Proposition 2.5.2. *L'application* $\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$ *est strictement décroissante, continue sur l'intervalle* $[-1, 1]$*, dérivable sur l'intervalle* $]-1, 1[$*, de dérivée :*
$$\arccos'(y) = -\frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}.$$

Parmi les valeurs remarquables, on peut noter que : $\arccos(-1) = \pi$, $\arccos(0) = \frac{\pi}{2}$ et $\arccos(1) = 0$.

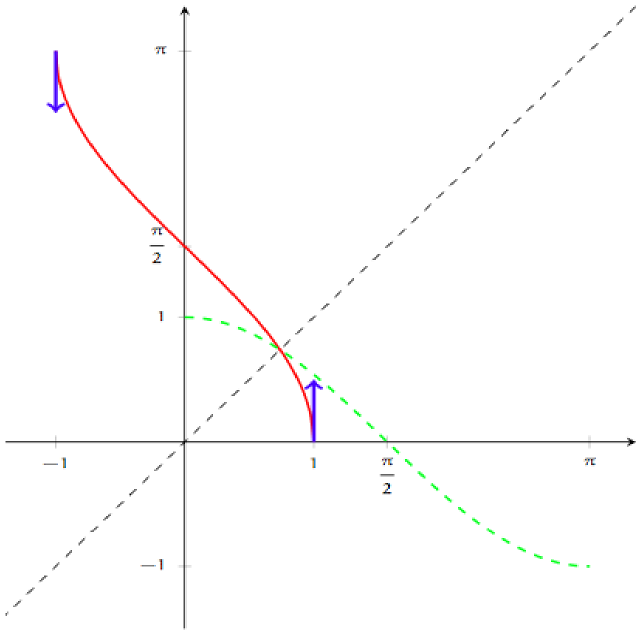

FIGURE 2.1 – Courbe représentative de la fontion arccos (en rouge) et de la fonction cos (en vert)

Fonction arcsin

Dans le même esprit que pour l'application arccos, on considère l'application $\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$. L'application est en particulier continue et strictement croissante et est donc une bijection.

Définition 2.5.3. *On appelle* $\arcsin : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ *l'application réciproque de la fonction* $\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$.

Une représentation du graphe de l'application arcsin (le graphe est le symétrique de celui de $\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$ par rapport à la première bissectrice) est fournie dans la figure 2.2.

Proposition 2.5.4. *L'application* $\operatorname{arccos} : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ *est impaire, strictement croissante, continue sur l'intervalle* $[-1, 1]$*, dérivable sur l'intervalle* $]-1, 1[$*, de dérivée :*

$$\arcsin'(y) = +\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Parmi les valeurs remarquables, on peut noter que : $\arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$, $\arcsin(0) = 0$ et $\arcsin(1) = \pi$.

Fonction arcsin

Dans le même esprit que ci-dessus, on considère l'application $\tan :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbf{R}$. L'application est en particulier continue et strictement croissante et est donc une bijection.

Définition 2.5.5. *On appelle* $\arctan : \mathbf{R} \to \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ *l'application réciproque de la fonction* $\tan : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbf{R}$.

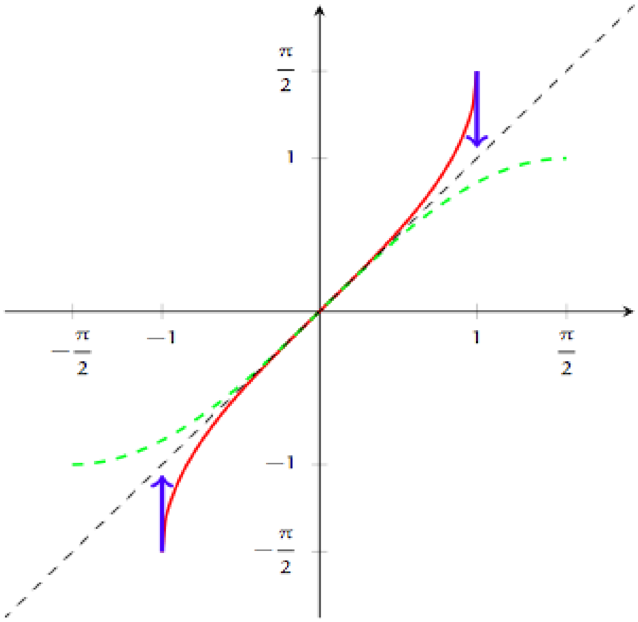

FIGURE 2.2 – Courbe représentative de la fontion arcsin (en rouge) et de la fonction sin (en vert)

Une représentation du graphe de l'application arctan (le graphe est le symétrique de celui de tan $:]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\to \mathbf{R}$ par rapport à la première bissectrice) est fournie dans la figure 2.3.

Proposition 2.5.6. *L'application* arctan $: \mathbf{R} \to]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ *est impaire, strictement croissante, continue sur l'intervalle* $\mathbf{R}$*, dérivable sur l'intervalle* $\mathbf{R}$*, de dérivée :*

$$\arctan'(y) = +\frac{1}{1+y^2}.$$

Parmi les valeurs remarquables, on peut noter que : $\arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}$, $\arctan(0) = 0$ et $\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$.

2.6 Dénombrabilité

Nous avons vu, dans le chapitre précédent, la notion de cardinal d'un ensemble fini. En particulier, cette notion permet de comparer les tailles de deux ensembles finis (l'un a plus d'éléments qu'un autre, ou inversement). Il est naturel de se demander si cette notion de "taille" s'étend pour des ensembles infinis, c'est-à-dire des ensembles non finis. En fait, il existe des ensembles infinis de "diverses tailles", le plus "petit ensemble infini" étant celui des entiers naturels.

Proposition 2.6.1. *L'ensemble des entiers naturels* $\mathbf{N}$ *est infini.*

Définition 2.6.2. *Un ensemble E est dit* ***dénombrable*** *s'il existe une surjection* $f : \mathbf{N} \to E$*.*

Informellement, un ensemble E est dénombrable si la "taille de $\mathbf{N}$" est plus grande, ou égal, à celle de E. En fait, si E est un ensemble dénombrable, l'existence d'une surjection $f : \mathbf{N} \to E$ permet de "numéroter" les éléments de E, en notant x_n l'élément $f(n)$. Les ensembles finis sont, en particulier, des ensembles dénombrables.

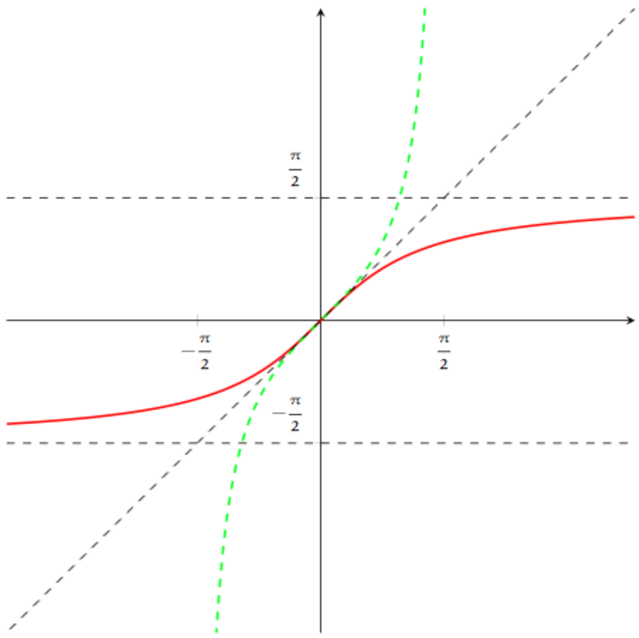

FIGURE 2.3 – Courbe représentative de la fontion arctan (en rouge) et de la fonction tan (en vert)

Proposition 2.6.3. *1. L'ensemble des entiers relatifs est dénombrable.*

2. L'ensemble des nombres rationnels est dénombrable.

La proposition ci-dessus signifie donc qu'on peut "numéroter" tous les entiers relatifs et tous les nombres rationnels. En ce sens, il y a autant d'entiers relatifs ou de rationnels que d'entiers naturels (ce qui peut paraître paradoxal !). Ci-dessous, on donne deux exemples d'ensembles non dénombrables.

Proposition 2.6.4. *1. L'ensemble $\mathcal{P}(\mathbf{N})$ des parties de $\mathbf{N}$ n'est pas dénombrable.*[2]

2. L'ensemble $\mathbf{R}$ des nombres réels n'est pas dénombrable.

Informellement, les ensembles $\mathcal{P}(\mathbf{N})$ et $\mathbf{R}$ sont tellement "gros" qu'on ne peut pas les numéroter. En ce sens, il y a "beaucoup plus d'éléments" dans $\mathcal{P}(\mathbf{N})$ et $\mathbf{R}$ que dans l'ensemble des entiers naturels. En fait, on peut montrer que $\mathcal{P}(\mathbf{N})$ et $\mathbf{R}$ sont en bijection et que, par conséquent, ils sont "de même taille".

2. Plus généralement, on peut en fait montrer que si E est un ensemble, alors il n'existe pas de surjection de E dans $\mathcal{P}(E)$

Chapitre 3

Relations d'ordre et relations d'équivalence

Sommaire

Dans le chapitre précédent, nous avons introduit la notion de relation (binaire) d'un ensemble A vers un ensemble B. Dans ce chapitre, on s'intéressera à des cas particuliers de relations d'un ensemble E vers lui-même (on parle alors simplement de relation sur l'ensemble E) : les relations d'équivalence et les relations d'ordre. Une relation d'équivalence regroupe les éléments d'un ensemble par des propriétés mutuellement exclusives. Une relation d'ordre établit une règle de comparaison entre tous ou certains des éléments.

3.1 Relations d'équivalence

Premières définitions

Définition 3.1.1. *Soit E un ensemble. On appelle* ***relation d'équivalence*** *toute relation $\mathcal{R}$ sur E satisfaisant les propriétés suivantes :*

1. *la relation $\mathcal{R}$ est réflexive, c'est-à-dire :*

$$\forall x \in E, x\mathcal{R}x;$$

2. *la relation $\mathcal{R}$ est symétrique, c'est-à-dire :*

$$\forall (x,y) \in E^2, x\mathcal{R}y \Longrightarrow y\mathcal{R}x;$$

3. *la relation $\mathcal{R}$ est transitive, c'est-à-dire :*

$$\forall (x,y,z) \in E^3, (x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}z) \Longrightarrow x\mathcal{R}z.$$

Exemple 3.1.2.
1. Soit E un ensemble quelconque. La relation $\mathcal{R}$ définie par $x\mathcal{R}y \iff x = y$ est une relation d'équivalence.
2. Soit $E = \mathbf{Z}$. La relation $\mathcal{R}$ sur $\mathbf{R}$ définie par $x\mathcal{R}y \iff y - x \in 3\mathbf{Z}$ est une relation d'équivalence.
3. Soit $E = \mathbf{R}^2$. La relation $\mathcal{R}$ sur $\mathbf{R}$ définie par $(x, x')\mathcal{R}(y, y') \iff y' - x' = y - x$ est une relation d'équivalence.
4. Soit $E = \mathbf{Z}$. La relation $\mathcal{R}$ sur $\mathbf{R}$ définie par $x\mathcal{R}y \iff x \leq y$ n'est pas une relation d'équivalence.

Définition 3.1.3. *Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur un ensemble E et soit $x \in E$ un élément de E. On appelle **classe d'équivalence** de x le sous-ensemble $C(x) \subset E$ des éléments reliés à x :*

$$C(x) := \{y \in E | x\mathcal{R}y\}.$$

Exemple 3.1.4.
1. Si $E = \mathbf{Z}$ et $x\mathcal{R}y \iff y - x \in 3\mathbf{Z}$, alors $C(x) = x + 3\mathbf{Z}$ pour tout $x \in \mathbf{Z}$. En particulier, $C(x)$ est égal à la réunion de tous les singletons de la forme $\{x + 3k\}$, où $k \in \mathbf{Z}$.
2. Si $E = \mathbf{R}^2$ et $(x, x')\mathcal{R}(y, y') \iff y' - x' = y - x$, alors $C((x, x')) = \{(y, y') \in \mathbf{R} : y' = y + x' - x\}$. En particulier, la classe $C((x, x'))$ est la droite de $\mathbf{R}$ de coefficient directeur égal à 1 et passant par le point de coordonnées (x, x').

En particulier, la classe d'équivalence d'un élément x contient nécessairement l'élément, c'est-à-dire : $x \in C(x)$.

Proposition 3.1.5. *Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur un ensemble E. Alors, les classes d'équivalence forment une partition de E, c'est-à-dire :*

1. *les classes sont non vides : $\forall x \in E, C(x) \neq \emptyset$;*
2. *les classes sont deux à deux disjointes : $\forall (x, y) \in E^2, x \neq y \Longrightarrow C(x) \cap C(y) = \emptyset$;*
3. *les classes recouvrent l'ensemble E : $\forall y \in E, \exists x \in E : y \in C(x)$.*

Définition 3.1.6. *Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur un ensemble E. On appelle **ensemble quotient** de E par la relation $\mathcal{R}$ l'ensemble des classes d'équivalence de E. On note cet ensemble de classes $E/\mathcal{R}$.*

En particulier, l'ensemble quotient est un ensemble de sous-ensembles.

Exemple 3.1.7. Soit $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et soit $\mathcal{R}$ la relation d'équivalence sur E telle que $1\mathcal{R}2$, $2\mathcal{R}3$, $4\mathcal{R}5$. Alors l'ensemble quotient est égal à :

$$E/\mathcal{R} = \{\{1, 2, 3\}, \{4, 5\}, \{6\}\}.$$

Exemple fondamental des congruences

Définition 3.1.8. *Soit n un entier naturel non nul. On dit que deux entiers relatifs a et b sont **congrus modulo** n ou encore que a est congru à b modulo n si n divise $a - b$. On note alors $a \equiv b[n]$.*

On définit ainsi une relation sur $\mathbf{Z}$ dite relation de congruence modulo n.

Proposition 3.1.9. *Soit n un entier naturel non nul. La relation de congruence modulo n est une relation d'équivalence sur l'ensemble des entiers relatifs et la classe d'équivalence d'un entier k est l'ensemble $k + n\mathbf{Z} := \{k + nl : l \in \mathbf{Z}\}$.*

Il est d'usage de noter $\overline{k} := k + n\mathbf{Z}$ la classe d'équivalence de k. On désigne alors par $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ l'ensemble quotient pour la relation de congruence modulo n. En particulier, pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a :

$$\mathbf{Z}/n\mathbf{Z} = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \dots, \overline{n-1}\}.$$

Cet ensemble sera fondamental en cours d'algèbre, notamment pour les groupes cycliques et les anneaux commutatifs finis.

Exemple 3.1.10. Soit $n = 3$. Les classes d'équivalence sont alors $\overline{0} = 3\mathbf{Z}$, $\overline{1} = 1 + 3\mathbf{Z}$ et $\overline{2} = 2 + 3\mathbf{Z}$. En particulier, $\mathbf{Z}/3\mathbf{Z} = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}\}$.

3.2 Relations d'ordre

Définition 3.2.1. *Soit E un ensemble. On appelle* ***relation d'ordre*** *toute relation $\mathcal{R}$ sur E satisfaisant les propriétés suivantes :*

1. *la relation $\mathcal{R}$ est réflexive, c'est-à-dire :*
$$\forall x \in E, x\mathcal{R}x;$$
2. *la relation $\mathcal{R}$ est antisymétrique, c'est-à-dire :*
$$\forall (x,y) \in E^2, (x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}x) \Longrightarrow x = y;$$
3. *la relation $\mathcal{R}$ est transitive, c'est-à-dire :*
$$\forall (x,y,z) \in E^3, (x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}z) \Longrightarrow x\mathcal{R}z.$$

Exemple 3.2.2.
1. Soit $E = \mathbf{N}, \mathbf{Z}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}$. La relation $x\mathcal{R}y \iff x - y \leq 0$ est une relation d'ordre.
2. Soit $E = \mathbf{N}$. La relation $x\mathcal{R}y \iff x|y$, où $x|y$ signifie que $\exists q \in \mathbf{N} : y = qx$, est une relation d'ordre.
3. Soit A un ensemble et $E = \mathcal{P}(A)$ l'ensemble des parties de A. La relation $X\mathcal{R}Y \iff X \subset Y$ est une relation d'ordre.
4. Soit $E = \mathbf{R}$. La relation $x\mathcal{R}y \iff x - y < 0$ n'est pas une relation d'ordre.

En particulier, les ensembles $\mathbf{N}, \mathbf{Z}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}$ possèdent tous un ordre "naturel" (cours de topologie, L3). Par contre, l'ensemble $\mathbf{C}$ n'a pas de relation d'ordre naturel. On peut néanmoins définir un ordre, dit *lexicographique*, comme suit : $(x + ix')\mathcal{R}(y + iy') \iff (x < x \text{ ou } x = x' \text{ et } y \leq y')$.[1]

Il y a une différence importante entre d'une part l'exemple 1 et d'autre part les exemples 2 et 3 (exemple 3.2.2) : dans le premier cas, on peut toujours comparer deux éléments mais il n'en est pas de même pour le second. Par exemple, si $X = \{1, 2, 3\}$ et $Y = \{2, 3, 5\}$, on a $X \not\subset Y$ et $Y \not\subset X$. Ceci amène à la définition suivante :

1. En fait, l'ordre lexicographique est celui qu'on utilise pour classer les mots dans un dictionnaire : on compare d'abord les premières lettres ; si elles sont égales, on compare les secondes et ainsi de suite.

Définition 3.2.3. *Soit E un ensemble et $\preccurlyeq$ une relation d'ordre sur E. On dit que $\preccurlyeq$ est une relation d'ordre* ***total*** *si :*

$$\forall(x,y) \in E^2, (x \preccurlyeq y \text{ ou } y \preccurlyeq x).$$

Définition 3.2.4.
- *Si E est muni d'une relation d'ordre $\preccurlyeq$, on dit que E est ordonné. On note alors $(E, \preccurlyeq)$.*
- *Si E est muni d'une relation d'ordre total, on dit que E est totalement ordonné.*
- *Si E est muni d'une relation d'ordre qui n'est pas une relation d'ordre total, on dit que E est partiellement ordonné.*

Exemple 3.2.5.
1. L'ensemble $(\mathbf{R}, \leq)$ est totalement ordonné.
2. L'ensemble $(\mathbf{N}, \preccurlyeq)$, où $x \preccurlyeq y \iff \exists q \in \mathbf{Z} : y = qx$, est partiellement ordonné.
3. L'ensemble $(\mathcal{A}, \subset)$, où A est un ensemble quelconque, est partiellement ordonné.

Définition 3.2.6. *Soient $(E, \preccurlyeq)$ et $(F, \preccurlyeq)$ deux ensembles ordonnés et soit $f : E \to F$ une application. On dit que f est* ***croissante*** *(respectivement* ***décroissante****) si :*

$$\forall(x,y) \in E^2, (x \preccurlyeq y) \Longrightarrow f(x) \preccurlyeq f(y).$$

Exemple 3.2.7.
1. Les applications $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, x \mapsto 2x - 3$ et $g : \mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}_+^*, x \mapsto \frac{1}{x}$ sont respectivement croissante et décroissante (pour l'ordre naturel sur $\mathbf{R}$).
2. Soient E et F deux ensembles (pas nécessairement ordonnés) et $f : E \to F$ une application. L'application $f : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(F), A \mapsto f(A)$ est croissante (en prenant comme relation d'ordre l'inclusion).

3.3 Majorants, maximum, borne supérieure

Définition 3.3.1. *Soient $(E, \preccurlyeq)$ un ensemble ordonné et A un sous-ensemble de E.*
1. *On dit que $m \in E$ est un* ***minorant*** *de A si $\forall x \in E, x \in A \Longrightarrow m \preccurlyeq x$.*
2. *On dit que $M \in E$ est un* ***majorant*** *de A si $\forall x \in E, x \in A \Longrightarrow x \preccurlyeq M$.*
3. *Un sous-ensemble admettant un minorant (respectivement majorant) est dit* ***minoré*** *(respectivement* ***majorée****).*
4. *Un sous-ensemble majoré et minoré est dit* ***borné****.*

Exemple 3.3.2.
1. Le sous-ensemble $\mathbf{N}$ est une partie minorée mais non majorée de $(\mathbf{R}, \leq)$.
2. L'intervalle $[0,1]$ est une partie bornée de $(\mathbf{R}, \leq)$.
3. L'ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties d'un ensemble E est borné (majoré par E et minoré par $\emptyset$).

Un ensemble peut posséder plusieurs majorants ou/et minorants, voire même une infinité. Par exemple, $1, 2, 3\sqrt{2}, \pi$ sont des majorants de $[0,1]$.

Définition 3.3.3. *Soient $(E, \preccurlyeq)$ un ensemble ordonné et $A \subset E$ un sous-ensemble de E.*
1. *On dit que m est le* ***minimum****, ou encore le plus petit élément, de A si m est un minorant de A et si $m \in A$. On le note alors $\min A$.*
2. *On dit que M est le* ***maximum****, ou encore le plus grand élément, de A si M est un majorant de A et si $M \in A$. On le note alors $\max A$.*

Exemple 3.3.4.
1. L'ensemble $\{2, 4, 5\}$ possède un minimum et un maximum, respectivement égaux à 2 et 5.
2. L'intervalle $[1, 2]$ possède un minimum et un maximum, respectivement égaux à 1 et 2.
3. L'intervalle $]1, 4]$ ne possède pas de minimum mais possède un maximum égal à 4.

Remarque 3.3.5.
1. Un sous-ensemble peut ne pas posséder de minimum ou/et de maximum.
2. Si un sous-ensemble de $\mathbf{R}$ possède un minimum ou/et maximum, alors celui-ci est unique.

Définition 3.3.6. *Soient $(E, \preccurlyeq)$ un ensemble ordonné et $A \subset E$ un sous-ensemble de E.*
1. *Si l'ensemble des minorants de A admet un plus grand élément, on l'appelle **borne inférieure**. On note cet élément* $\inf A$.
2. *Si l'ensemble des majorants de A admet un plus petit élément, on l'appelle **borne supérieure**. On note cet élément* $\sup A$.

Exemple 3.3.7.
1. L'intervalle $[0, 1[$ possède une borne inférieure (qui est en fait le minimum) égale à 0 et une borne supérieure (qui n'est pas un maximum) égal à 1.
2. L'intervalle $]-\infty, 0[$ ne possède pas de borne inférieure mais possède une borne supérieure égale à 0.

Remarque 3.3.8.
1. Les mêmes remarques que pour le minimum/maximum restent valables : un sous-ensemble peut ne pas posséder de borne inférieure ou/et de borne supérieure. De plus, si un sous-ensemble de $\mathbf{R}$ possède une borne inférieure ou/et supérieure, alors celle-ci est unique.
2. Si $A \subset E$ admet un minimum (respectivement un maximum), alors le sous-ensemble A admet une borne inférieure (respectivement borne supérieure) et $\inf A = \min A$ (respectivement $\sup A = \max A$).
3. Les réciproques de l'assertion ci-dessus ne sont pas vraies. Par exemple, $[0, 1[$ possède bien une borne supérieure (égale à 1) mais n'a pas de maximum.

La proposition suivante fournit une caractérisation pratique pour montrer qu'un élément est la borne inférieure/supérieure d'un sous-ensemble de $\mathbf{R}$.

Proposition 3.3.9. *Soit $A \subset \mathbf{R}$ une sous-ensemble de $\mathbf{R}$.*
1. *Un réel $m \in \mathbf{R}$ est la borne inférieure de A si et seulement si :*
$$\forall x \in \mathbf{R}, (x \in A \Longrightarrow x \geq m) \quad \text{et} \quad \forall \epsilon > 0, \exists x \in A : m + \epsilon \geq x.$$
2. *Un réel $M \in \mathbf{R}$ est la borne supérieure de A si et seulement si :*
$$\forall x \in \mathbf{R}, (x \in A \Longrightarrow x \leq M) \quad \text{et} \quad \forall \epsilon > 0, \exists x \in A : M - \epsilon \leq x.$$

Le résultat suivant fournit une caractérisation fondamentale de l'ensemble des nombres réels.

Théorème 3.3.10. *Toute partie non vide minorée (respectivement majorée) de $\mathbf{R}$ possède une borne inférieure (respectivement supérieure).*

Remarque 3.3.11.
1. Le résultat ci-dessus n'est pas vrai si on ne suppose pas que la partie est minorée/majorée. Par exemple, l'intervalle $]0, +\infty[$ ne possède pas de borne supérieure (puisqu'il ne possède pas de majorant).
2. Le résultat ci-dessus n'est pas vrai si l'on remplace $\mathbf{R}$ par $\mathbf{Q}$. Par exemple, le sous-ensemble $A = \{x \in \mathbf{Q} | x \leq \sqrt{2}\}$ ne possède pas de borne supérieure dans $\mathbf{Q}$ (en revanche, il possède une borne supérieure dans $\mathbf{R}$ égale à $\sqrt{2}$).

Complément sur la densité

Définition 3.3.12. *Un sous-ensemble A de* $\mathbf{R}$ *est dit* ***dense*** *dans* $\mathbf{R}$ *si :*

$$\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2, x < y \Longrightarrow \exists r \in A : x < r < y.$$

Exemple 3.3.13.

1. Les sous-ensembles $\mathbf{Q}$ et $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ sont denses dans $\mathbf{R}$.
2. Le sous-ensemble $\mathbf{Z}$ n'est pas dense dans $\mathbf{R}$.

Le fait que $\mathbf{Q}$ et $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ soient denses dans $\mathbf{R}$ peut paraître paradoxal. En effet, par définition, il existe au moins un rationnel entre deux irrationnels et au moins un irrationnel entre deux rationnels. Cela pourrait laisser penser qu'il y a autant de rationnels que d'irrationnels. Pourtant, cela est faux car, comme nous l'avons vu dans le premier chapitre, $\mathbf{Q}$ est dénombrable et $\mathbf{R}\setminus$ n'est pas dénombrable. En particulier, il y a "beaucoup plus" d'irrationnels que de rationnels. Un tel "paradoxe" vient du fait que nous n'avons pas toujours une profonde intuition sur les ensembles infinis.