EILCO
MAT11
CP1, $1^{\text{ère}}$ année
Année 2017-2018

Fiche n°1. Dérivation.

Exercice 1. (1) Résoudre les équations suivantes :

$$x^2+x-6=0, \qquad x^2-6x+5=0, \qquad x^4-3x^2-4=0, \qquad x^{\sqrt{x}}=(\sqrt{x})^x.$$

(2) Résoudre les inéquations suivantes :

$$x^2-9x+14>0, \qquad |x+2|>3, \qquad \frac{2x-5}{x-2}\le -1, \qquad 2^{x^3}\le 3^{x^2}.$$

Exercice 2. Déterminer le domaine de définition puis esquisser les courbes représentatives des fonctions f_1, f_2, f_3 et f_4 définies par :

$$f_1(x)=\frac{1}{x^2-4}, \qquad f_2(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2-4}}, \qquad f_3(x)=\sqrt{(x-1)(x+2)}, \qquad f_4(x)=\ln\left(\frac{x}{x+1}\right).$$

Exercice 3. (1) Soient f_1, f_2 et f_3 les fonctions définies par $f_1(x)=\ln x$, $f_2(x)=\sqrt{x}$ et $f_3(x)=x+2$. Donner les domaines de définition et les expressions des fonctions suivantes :

$$f_1\circ f_2, \qquad f_2\circ f_1, \qquad f_2\circ f_3, \qquad f_1\circ f_3\circ f_2.$$

(2) Ecrire sous la forme $v\circ u$ chacune des fonctions définies ci-dessous par :

$$g_1(x)=(x-3)^2, \qquad g_2(x)=\sin(x^2-1), \qquad g_3(x)=\sqrt{x^3+2x-1}, \qquad g_4(x)=e^{\sin(x^2)}.$$

Exercice 4. Donner les domaines de définition puis calculer les dérivées des fonctions suivantes :

$$f_1(x)=x^4-3x^3+2x-3, \qquad f_2(x)=2\sqrt{x}-\frac{1}{x}, \qquad f_3(x)=x^{-2}, \qquad f_4(x)=(2x^2+1)\sqrt{x},$$

$$f_5(x)=\frac{x+1}{x^2+1}, \qquad f_6(x)=(2x+5)^3, \qquad f_7(x)=\left(\frac{x+1}{x+2}\right)^2, \qquad f_8(x)=\sqrt{\frac{x+1}{x-2}},$$

$$f_9(x)=\ln(\sqrt{x^2+1}), \qquad f_{10}(x)=\cos(\ln x), \qquad f_{11}(x)=\exp(x^3+2x^2), \qquad f_{12}(x)=\frac{1}{\exp(x^2)}.$$

Exercice 5. (1) Soit f la fonction définie par $f(x)=x^2+5x+4$.

(a) Préciser le domaine de définition ainsi que le domaine de dérivabilité de la fonction f et calculer sa dérivée.

(b) Déterminer les sens de variations de la fonction f et déterminer, s'ils existent, ses extrema locaux.

(2) Répondre aux mêmes questions pour la fonction g définie par $g(x)=\frac{x^2+1}{x+1}$.

Exercice 6. Pour chacune des fonctions suivantes, donner l'équation de la tangente à la courbe de la fonction aux points d'abscisse x_0 indiquée.

(1) $f: x\mapsto x^2$ en $x_0=2$.

(2) $g: x\mapsto 2x^3-3x^2+1$ en $x_0=1$.

(3) $h: x\mapsto e^x$ en $x_0=0$.

Exercice 7. Soit $f : \mathbf{R}_+ \to [1, +\infty[, x \mapsto \sqrt{x^2+1}$.

(1) (a) Justifier que f est dérivable sur $\mathbf{R}_+$ et calculer sa dérivée.
    (b) En déduire que f est une bijection.

(2) (a) Montrer que pour tout $y \geq 1$, on a $f^{-1}(y) = \sqrt{y^2-1}$.
    (b) Préciser sur quel intervalle f^{-1} est dérivable et calculer sa dérivée.

(3) En appliquant directement le théorème de dérivation de l'application réciproque, retrouver l'expression de la dérivée de f^{-1}.

Exercice 8. (1) Posons $f = \sin$ et $I = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
    (a) Justifier que f est une bijection de I sur $[-1, 1]$.
    (b) Tracer la courbe de f sur l'intervalle I puis celle de f^{-1}.
    (c) Préciser sur quel intervalle la fonction f^{-1} est dérivable puis calculer sa dérivée.

(2) Répondre aux mêmes questions pour $f = \cos$ et $I = [0, \pi]$.

Exercice 9. Soit tan la fonction définie par $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$.

(1) La fonction tan est-elle périodique ? paire ? impaire ?
(2) Donner le domaine de définition de tan. Sur quel intervalle suffit-il d'étudier tan ?
(3) Calculer la dérivée de tan et en déduire que tan est une bijection de I sur $\mathbf{R}$. Dans ce qui suit, on désigne par arctan sa fonction réciproque.
(4) Tracer la courbe représentative de tan sur $I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ puis tracer celle de arctan.
(5) Déterminer la dérivée de arctan.

Exercice 10. On définit la fonction ch sur $\mathbf{R}$ par :

$$\mathrm{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

(1) Justifier que ch est dérivable sur $\mathbf{R}$ et calculer sa dérivée.
(2) Montrer que la restriction de la fonction ch à $\mathbf{R}_+$ admet une fonction réciproque, que l'on note argch, de $[1, +\infty[$ sur $[0, +\infty[$.
(3) Tracer les courbes représentatives des fonctions ch et argch.
(4) Calculer la dérivée de argch.
(5) En déduire que $\mathrm{argch}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$ pour tout $x \in [1, +\infty[$.

Exercice 11. Soient f et g les fonctions définies par :

$$f(x) = \frac{x}{1+|x|}, \qquad g(x) = \frac{|x|}{1+x^2}.$$

(1) Justifier que f et g sont dérivables sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$.
(2) Etudier la dérivabilité des fonctions f et g en 0.