Université du Littoral Côte d'Opale
Math 2
L1 MSPI
Année 2017-2018

Fiche n°1. Théorie des ensembles.

Exercice 1. On considère le sous-ensemble de $\mathbf{R}^2$ suivant : $E = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 | x^2 + y^2 < 1\}$. Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses :

$$(0,0) \in E\,? \quad 0 \in E\,? \quad (1,1) \in E\,? \quad \emptyset \in E\,? \quad \{(0,0)\} \in E\,?$$

Exercice 2. On considère les sous-ensembles de $\mathbf{R}$ suivants :

$$A = [3, 13], \quad B =]8, 12[, \quad C = \{4\}.$$

(1) Est-il vrai que $B \subset A$? $C \subset A$? $C \subset B$?
(2) Déterminer $A \cap B$, $A \cap C$, $B \cap C$, $A \cup B$, $A \cup C$ et $B \cup C$.

Exercice 3. Soient A, B, C les sous-ensembles de $\mathbf{N}$ suivants :

$$A = \{n \in \mathbf{N} | \exists k \in \mathbf{N}, n = 3k\}$$
$$B = \{n \in \mathbf{N} | \exists k \in \mathbf{N}, n = 6k\}$$
$$C = \{n \in \mathbf{N} | \exists k \in \mathbf{N}, n = 2k\}$$

(1) L'inclusion $A \subset B$ est-elle vraie ou fausse ?
(2) L'inclusion $B \subset A$ est-elle vraie ou fausse ?
(3) Démontrer que $A \cap C = B$.

Exercice 4. Soit E un ensemble et soient A, B, C des sous-ensembles de E. Montrer que :

(1) $(A \cap B = A \cup B) \Longrightarrow A = B$.
(2) $(A \cap B = A \cap C$ et $A \cup B = A \cup C) \Longrightarrow B = C$.
(3) $A \cap B = A \cap C \Longleftrightarrow A \cap \complement_E B = A \cap \complement_E C$.

Exercice 5. Soit E un ensemble et soient A, B, C des sous-ensembles de E. On considère $Y = (A \cup B) \cap C$ et $Z = A \cup (B \cap C)$.

(1) Montrer que $Y \neq Z$.
(2) Montrer que $A = C \Longrightarrow Y = Z$.
(3) La réciproque de l'implication précédente est-elle vraie ?

Exercice 6. Soit E un ensemble et A, B, C des sous-ensembles de E. Simplifier au maximum les expressions suivantes :

(1) $A \cup (B \cap (A \cup C))$;
(2) $(A \cap B) \cup (\complement_E A \cap B)$;
(3) $\complement_E(\complement_E A \cap B) \cap \complement_E(A \cap B)$;
(4) $\complement_E((A \cap B) \cup (B \setminus A))$.

Exercice 7. Soit E un ensemble et soient A, B, C des sous-ensembles de E. Dire s'il est vrai ou faux que :

(1) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$;
(2) $A \setminus (A \setminus B) = B$;
(3) si $A \cap B \neq \emptyset$, $B \cap C \neq \emptyset$ et $A \cap C \neq \emptyset$, alors $A \cap B \cap C \neq \emptyset$;
(4) si $A \cup B \subset A \cup C$, alors $B \subset C$;
(5) si $A \cap B \subset A \cap C$, alors $B \subset C$;
(6) si $A \cup B \subset A \cup C$ et $A \cap B \subset A \cap C$, alors $B \subset C$.

Dans l'affirmative, on justifiera la réponse par une démonstration et, dans le cas contraire, on donnera un contre-exemple sous la forme d'un diagramme de Venn.

Exercice 8. Soit E un ensemble et soient A, B deux sous-ensembles de E. On note $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ leur *différence symétrique.*

(1) Dans le cas particulier où $E = \mathbf{R}$, $A = [0, 4]$ et $B =]3, 9[$, déterminer $A \Delta B$.
(2) Dans le cas général (où E, A, B sont quelconques), montrer que :
  (a) $(A \Delta B) \cup (A \Delta \complement_E B) = E$;
  (b) $\complement_E(A \Delta B) = (A \cup \complement_E B) \cap (\complement_E A \cup B)$.

Exercice 9. Soit E un ensemble et soient A, B des sous-ensembles de E. L'objectif de cet exercice est de résoudre l'équation $A \cap X = B$ d'inconnue X.

(1) Montrer que si $B \not\subset A$, l'équation n'a pas de solution.
(2) Supposons que B soit inclus dans A.
  (a) Montrer que si X est un sous-ensemble de E tels que $B \subset X \subset B \cup \complement_E A$, alors X est solution de l'équation.
  (b) Montrer que si X est solution de l'équation, alors $B \subset X \subset B \cup \complement_E A$.

Exercice 10. Soient E un ensemble et A, B deux sous-ensembles de E. Discuter et résoudre l'équation $A \cup X = B$ d'inconnue $X \subset E$.

Exercice 11. On considère les intervalles $A = [2, 4]$ et $B = [3, 6]$.

(1) Tracer, dans $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$, les ensembles $(A \times B) \cup (B \times A)$ et $(A \cup B) \times (B \cup A)$. Ces ensembles sont-ils égaux ?
(2) Est-il vrai que les sous-ensembles $(A \times B) \cap (B \times A)$ et $(A \cap B) \times (B \cap A)$ sont égaux ? Cette propriété se généralise-t-elle à des sous-ensembles d'un ensemble E quelconque ?

Exercice 12. On considère l'ensemble $E = \{1, 2, 3, 4\}$. Déterminer l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties de E et préciser son cardinal.

Exercice 13. On considère l'ensemble $A = \{a, b\}$. Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses :

$$a \in A\,? \quad \{a\} \in A\,? \quad \{a\} \subset A\,? \quad \{a\} \in \mathcal{P}(A)\,? \quad \emptyset \in \mathcal{P}(A)\,? \quad \{\{a\}, \{a, b\}\} \subset \mathcal{P}(A)\,?$$

Exercice 14. Soient A et B deux ensembles finis et soient a, b, c trois éléments de A. Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses :

$$\mathcal{P}(A) \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))\,? \quad |\mathcal{P}(\{a, b, c\})| = 3\,? \quad |\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{a\})| = 4\,? \quad \mathcal{P}(A \times B) = \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)\,?$$