EILCO
MAT11
CP1, 1ère année
Année 2017-2018

Fiche n°2. Intégration.

Exercice 1. Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_0^1 (2x^4 - 3x^2 + 1)\mathrm{d}x, \qquad \int_1^2 \left(\frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right)\mathrm{d}x, \qquad \int_1^3 \left(x^2 e^{x^3} - \frac{x+1}{x^2+2x}\right)\mathrm{d}x, \qquad \int_0^\pi \sin^2(x)\mathrm{d}x.$$

Exercice 2. (1) Déterminer les réels a et b tels que

$$f_1(x) := \frac{x+1}{(x-1)(x+1)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1}$$

et en déduire une primitive de f_1.

(2) Déterminer les réels a b et c tels que

$$f_2(x) := \frac{x^2+x+1}{x(x+1)(x-2)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x-2}$$

et en déduire une primitive de f_2.

(3) Déterminer les réels a, b et c tels que

$$f_3(x) := \frac{3x^2}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{a}{x-1} + \frac{bx+c}{x^2+x+1}$$

et en déduire une primitive de f_3.

Exercice 3. Déterminer les primitives des fonctions f_1, f_2 et f_3 définies par :

$$f_1(x) = \frac{1}{x^2-x-12}, \qquad f_2(x) = \frac{1}{x^2+5x+6}, \qquad f_3(x) = \frac{1}{4x^2-4x-3}$$

et préciser les domaines de définition des primitives.

Exercice 4. (1) En effectuant des intégrations par parties, calculer les intégrales suivantes :

$$\int_{-1}^1 xe^x\mathrm{d}x, \qquad \int_{-4}^4 x^2e^x\mathrm{d}x, \qquad \int_1^2 (x^2-x)\ln(x)\mathrm{d}x, \qquad \int_0^y x^2\sin(x)\mathrm{d}x.$$

(2) En effectuant une intégration par parties, donner la primitive de la fonction ln s'annulant en 1 (on écrira ln sous la forme $\ln(x) = 1 \times \ln(x)$).

Exercice 5. Soient $I := \int_0^\pi x\cos^2(x)\mathrm{d}x$ et $J = \int_0^\pi x\sin^2(x)\mathrm{d}x$.

(1) Calculer I et $I + J$.
(2) En déduire J.

Exercice 6. A l'aide d'un changement de variables, calculer les intégrales suivantes :

(1) $\int_1^2 \frac{\ln(x)}{x+x(\ln(x))^2}\mathrm{d}x$, avec $t = \ln(x)$.
(2) $\int_1^4 \frac{1}{x\sqrt{1+x}}\mathrm{d}x$, avec $t = \sqrt{1+x}$.
(3) $\int_0^5 \frac{1}{e^x+e^{-x}}\mathrm{d}x$, avec $t = e^x$.
(4) $\int_0^{\ln(2)} \sqrt{e^x-1}\mathrm{d}x$, avec $t = \sqrt{e^x-1}$.

(5) $\int_2^3 \ln(\sqrt{x}-1)\,\mathrm{d}x$, avec $t=\sqrt{x}$.

(6) $\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$, avec $x=\sin(t)$.

Exercice 7. Soient u et v deux fonctions dérivables sur $\mathbf{R}$ et f une fonction continue sur $\mathbf{R}$.

(1) On pose $\phi(x)=\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\mathrm{d}t$. Montrer que ϕ est dérivable sur $\mathbf{R}$ et calculer sa dérivée.

(2) Calculer la dérivée de la fonction ψ définie par $\psi(x)=\int_x^{2x}\frac{1}{1+t^2+t^4}\mathrm{d}t$.

Exercice 8. Pour tout entier $n\geq 0$, on pose $I_n=\int_0^1(1-x^2)^n\mathrm{d}x$.

(1) Montrer que $(1-x^2)^{n+1}=(1-x^2)^n-x^2(1-x^2)^n$, puis en effectuant une intégration par parties, établir une relation de récurrence entre I_n et I_{n+1}.

(2) En déduire I_n.

Exercice 9. Soit $a\geq 0$. Le but de cet exercice est d'approcher la quantité $\ln(1+a)$ par la fonction polynômiale P définie sur $\mathbf{R}$ par :

$$P(x)=\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+x.$$

Pour cela, pour tout $k\in\mathbf{N}^*$, on pose :

$$I_0(a)=\int_0^a\frac{1}{1+t}\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad I_k(a)=\int_0^a\frac{(t-a)^k}{(1+t)^{k+1}}\mathrm{d}t.$$

(1) (a) Calculer $I_0(a)$ en fonction de a.

(b) A l'aide d'une intégration par parties, exprimer $I_1(a)$ en fonction de a.

(c) A l'aide d'une intégration par parties, démontrer que pour $k\in\mathbf{N}^*$, on a la relation de récurrence suivante :

$$I_{k+1}(a)=\frac{(-1)^{k+1}a^{k+1}}{k+1}+I_k(a).$$

(d) Calculer $I_2(a), I_3(a), I_4(a)$ et en déduire que $I_5(a)=\ln(1+a)-P(a)$.

(2) Soit $J(a)=\displaystyle\int_0^a(t-a)^5\mathrm{d}t$.

(a) Calculer $J(a)$.

(b) Démontrer que pour tout $a\in[0,+\infty[$, on a : $J(a)\leq I_5(a)\leq 0$.

(c) En déduire que pour tout $a\in[0,+\infty[$, on a : $|\ln(1+a)-P(a)|\leq\frac{a^6}{6}$.

(d) Déterminer un intervalle sur lequel $P(a)$ est une valeur approchée de $\ln(1+a)$ à 10^{-3} près.