IUT du Littoral Côte d'Opale — Année 2016/2017
DUT Informatique, 1ère année — Semestre 1
Module 1202 : Algèbre Linéaire — Feuille d'exercices 2

Calcul matriciel

Exercice 1 :
Effectuer le produit des deux matrices suivantes formées de mots en omettant les signes d'opérations (Raymond Queneau, membre de l'OULIPO, 1964)

$$\begin{pmatrix} \text{le} & \text{a} & \text{le} \\ \text{un} & \text{a} & \text{un} \\ \text{le} & \text{avait} & \text{un} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{chat} & \text{rat} & \text{lion} \\ \text{mangé} & \text{dévoré} & \text{dégusté} \\ \text{poisson} & \text{fromage} & \text{touriste} \end{pmatrix}$$

Exercice 2 :
1) Effectuer l'opération suivante :

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 & -5 \\ 4 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 6 \\ 5 & 7 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

2) Calculer tous les produits possibles de deux matrices parmi les matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -5 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix}$$

3) On pose $U = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{1,3}(\mathbf{R})$.
Si possible, calculer les produits UA, UB, UC et UD, avec les matrices de la question 2).

4) On pose $V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbf{R})$.
Si possible, calculer les produits AV, BV, CV et DV, avec les matrices de la question 2).

5) On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} -9 & 7 & 3 \\ -13 & 10 & 4 \\ 4 & -3 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer M^2 puis M^3.

Exercice 3 :
On considère les matrices $M = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} -4 & -8 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
Calculer les produits MN et NM. Que peut-on en conclure ?

Exercice 4 :
On donne $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 4 & -6 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 & 7 \\ -1 & -2 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
1) Calculer AB et BA si possible.
2) Déterminer les matrices ${}^tA$ et ${}^tB$ puis calculer le produit ${}^tB{}^tA$. Que remarque-t-on ?

Exercice 5 :
Écrire les systèmes de l'exercice 4 de la feuille 1 sous forme matricielle.

Exercice 6 :
On note $M = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 44 & 5 \\ -7 & 6 \end{pmatrix}$.

1. La matrice M est-elle inversible ? Le cas échéant, calculer M^{-1}.
2. Résoudre l'équation $MX + N = I_2$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$.
3. Résoudre l'équation $YM + N = I_2$ d'inconnue $Y \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$.

Exercice 7 :
Calculer l'inverse de chacune des matrices suivantes dans le cas où elles sont inversibles :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 8 :
On admet que la matrice A suivante est inversible. Calculer son inverse A^{-1}.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 9 : La couleur et l'intensité de la lumière peuvent être représentés par un vecteur colonne

$$C = \begin{pmatrix} r \\ g \\ b \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad \begin{cases} r & \text{est l'intensité de la composante rouge} \\ g & \text{est l'intensité de la composante verte} \\ b & \text{est l'intensité de la composante bleue} \end{cases}$$

La rétine de l'oeil humain est composée de deux sortes de récepteurs : les cônes et les bâtonnets. Les premières sont responsables de la vision à faible niveau d'énergie (vision nocturne , dite *scotopique* et vision à niveaux de gris) et ne voient pas les couleurs. Ils mesurent l'intensité i de la lumière visible. Les secondes sont responsables de la vision diurne colorée. La vision de ces couleurs n'est cependant pas directe, elle est envoyée au cerveau au moyen d'un signal

$$I = \begin{pmatrix} i \\ l \\ c \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad \begin{cases} i = \frac{1}{3}(r+g+b) & \text{est l'intensité de la lumière} \\ l = r - g & \text{est l'intensité des ondes longues} \\ c = b - \frac{1}{2}(r+g) & \text{est l'intensité des ondes courtes} \end{cases}$$

1. Déterminer la matrice A telle que $AC = I_3$.
2. Vérifier que la matrice A est inversible et calculer A^{-1}.
3. En déduire les composantes r, g et b en fonction des données i, l et c.

(*) **Exercice 10 :**
Soit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

1) Déterminer la matrice B telle que : $A = 2I_3 + B$. Calculer B^2, B^3 puis B^n pour $n \geqslant 3$.
2) En déduire la valeur de A^n en fonction de $n \in \mathbf{N}$.