Université du Littoral Côte d'Opale
Math 2
L1 MSPI
Année 2017-2018

Fiche n°2. Applications.

Exercice 1. Déterminer l'image directe $f(A)$ et l'image réciproque $f^{-1}(B)$ lorsque :

(1) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, x \mapsto |x| + 2$, $A = [-2, 3]$, $B = [1, 5]$;
(2) $f : \mathbf{R}^* \to \mathbf{R}^*, x \mapsto \frac{1}{x}$, $A = [-1, 1] \setminus \{0\}$, $B = [-2, 3[$;
(3) $f : \mathbf{N} \times \mathbf{N} \to \mathbf{N}, (m, n) \mapsto mn$, $A = 2\mathbf{N} \times \{2\}$, $B = \{3, 4\}$;
(4) $f : \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}, (m, n) \mapsto m + n$, $A = 2\mathbf{Z} \times 3\mathbf{Z}$, $B = 2\mathbf{Z}$.

Exercice 2. On considère l'application $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2, (x, y) \mapsto (xy, x^2 + y^2)$.

(1) L'application f est-elle injective ?
(2) L'application f est-elle surjective ?
(3) Soit D la droite d'équation $y = x$. Montrer que $f(D) = \{(z, 2z) | z \geq 0\}$.

Exercice 3. Pour chacune des applications suivantes, préciser si l'application est injective et/ou surjective :

(1) $f : \mathbf{R} \to [-1, 1], x \mapsto \sin(\pi x)$;
(2) $f : \mathbf{N} \times \mathbf{N} \to \mathbf{R} \times \mathbf{R}, (m, n) \mapsto 2^m 3^n$;
(3) $f : \mathbf{N} \times \mathbf{N} \to \mathbf{N}, (m, n) \mapsto 2m + 3n$;
(4) $f : \mathbf{Z}^2 \to \mathbf{Z}^2, (x, y) \mapsto (2x + 3y, 3x + 2y)$;
(5) $f : \mathbf{R}^{\mathbf{R}} \to \mathbf{R}, \phi \mapsto \phi(0)$.

Exercice 4. Soient E, F, G trois ensembles et soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications.

(1) Montrer que si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ est injective.
(2) Montrer que si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ est surjective.
(3) Montrer que si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.
(4) Montrer que si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.

Exercice 5. Soient E et F deux ensembles et soit $f : E \to F$ une application.

(1) Montrer que pour tous sous-ensembles A et A' de E, on a :
$$f(A \cup A') = f(A) \cup f(A') \quad \text{et} \quad f(A \cap A') \subset f(A) \cap f(A').$$
Donner un exemple où l'inclusion de droite est stricte et montrer que si f est injective, alors on a égalité.
(2) Montrer que pour tous sous-ensembles B et B' de F, on a :
$$f^{-1}(B \cup B') = f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B') \quad \text{et} \quad f^{-1}(B \cap B') = f^{-1}(B) \cap f^{-1}(B').$$
(3) Montrer que si A est un sous-ensemble de E et B un sous-ensemble de F, on a :
$$A \subset f^{-1}(f(A)) \quad \text{et} \quad f(f^{-1}(B)) \subset B.$$
Montrer que l'inclusion de gauche est une égalité si f est injective et que l'inclusion de droite est une égalité si f est surjective.

Exercice 6. Soit $f : \mathbf{R}^* \to \mathbf{R}^*, x \mapsto \frac{1}{x^2}$ et $A = [-1, 2] \setminus \{0\} \subset \mathbf{R}$.

(1) Déterminer $f(A)$ puis $f^{-1}(f(A))$.

(2) A-t-on $A = f^{-1}(f(A))$?

Exercice 7. Soit $E = \{a, b, c, d\}$ et soit $f : E \to E$ l'application définie par : $f(a) = b$, $f(b) = d$, $f(c) = a$ et $f(d) = c$. Montrer que f est bijective et déterminer son application réciproque.

Exercice 8. Soient E, F, G trois ensembles et soient $f : E \to F$, $g : F \to G$ deux applications.

(1) Montrer que si $g \circ f$ est bijective et si g est injective, alors g et f sont bijectives.

(2) Réciproquement, est-il vrai que si g et f sont bijectives, alors $g \circ f$ est bijective ? Si oui, exprimer l'application réciproque de $g \circ f$ en fonction de celles de f et de g.

Exercice 9. Soit $f : \mathbf{R}\backslash\{3\} \to \mathbf{R}\backslash\{2\}$ l'application définie pour tout $x \in \mathbf{R}\backslash\{3\}$ par $f(x) = \frac{2x+5}{x-3}$. Montrer que f est bijective et déterminer son application réciproque.

Exercice 10. Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ l'application définie pour tout $x \in \mathbf{R}$ par $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$.

(1) L'application f est-elle injective ? surjective ?

(2) Montrer que $f(\mathbf{R}) = [-1, 1]$.

(3) Montrer que la restriction $\overline{f} : [-1, 1] \to [-1, 1], x \mapsto f(x)$ est une bijection et déterminer son application réciproque.

(4) Retrouver le résultat de la question précédente en étudiant les variations de f.

Exercice 11. Soient E et F deux sous-ensembles de $\mathbf{R}$ et soit $f : E \to F$ une bijection. On désigne par $\Gamma = \{(x, f(x)) | x \in E\}$ le graphe de f.

(1) Donner une expression explicite de $s(x, y)$, où $s : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ désigne la symétrie par rapport à la première bissectrice.

(2) Montrer que si Γ^{-1} désigne le graphe de f^{-1}, alors $\Gamma^{-1} = s(\Gamma)$.

Exercice 12. Soient A et B deux ensembles finis.

(1) On désigne par $f : A \to B$ une application.
  (a) Montrer que $|f(A)| \leq |B|$.
  (b) Montrer que si f est injective, on a $|A| \leq |B|$.
  (c) Montrer que si f est surjective, on a $|A| \geq |B|$.

(2) Combien existe-t-il d'injections, de surjections et de bijections de A dans B ?

Exercice 13. (1) Montrer que l'application :

$$\sin_{|[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]} : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1], x \mapsto \sin x$$

est une bijection. *On appelle arcsinus sa réciproque que l'on note* arcsin.

(2) Montrer que l'application arcsin est strictement croissante sur $[-1, 1]$.

(3) Montrer que l'application arcsin est impaire.

(4) Montrer que l'application arcsin est dérivable sur $]-1, 1[$ et que, pour tout $y \in]-1, 1[$, on a :

$$\arcsin'(y) = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}.$$

(5) Tracer les courbes représentatives des applications $\sin_{|[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}$ et arcsin.

Exercice 14. (1) Montrer que l'application :
$$\cos_{|[0,\pi]} : [0,\pi] \to [-1,1], x \mapsto \cos x$$
est une bijection. *On appelle arccosinus sa réciproque que l'on note* arccos.

(2) Montrer que l'application arccos est strictement décroissante sur $[-1,1]$.

(3) Montrer que l'application arccos est dérivable sur $]-1,1[$ et que, pour tout $y \in]-1,1[$, on a :
$$\arccos'(y) = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

(4) Tracer les courbes représentatives des applications $\cos_{|[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}$ et arccos.

Exercice 15. (1) Montrer que l'application :
$$\tan_{|]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[} : \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\to \mathbf{R}, x \mapsto \tan x$$
est une bijection. *On appelle arctangente sa réciproque que l'on note* arctan.

(2) Montrer que l'application arctan est strictement croissante sur $\mathbf{R}$.

(3) Montrer que l'application arctan est impaire.

(4) Montrer que l'application arctan est dérivable sur $\mathbf{R}$ et que, pour tout $y \in \mathbf{R}$, on a :
$$\arctan'(y) = \frac{1}{1+y^2}.$$

(5) Tracer les courbes représentatives des applications $\tan_{|]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[}$ et arctan.

Exercice 16. Etudier et représenter graphiquement la fonction f définie par $f(x) = \arcsin(3x - 4x^3)$ et exprimer $f(x)$ en fonction de $\arcsin(x)$.

Exercice 17. Démontrer que les ensembles $\mathbf{Z}$, $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ et $\mathbf{Q}$ sont dénombrables.

Exercice 18. (1) Démontrer que si A et B sont dénombrables, alors $A \cup B$ est dénombrable.

(2) En déduire que $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ n'est pas dénombrable.