EILCO
MAT11
CP1, 1ère année
Année 2017-2018

Fiche n°3. Equations différentielles.

Exercice 1. Résoudre les équations différentielles linéaires d'ordre 1 suivantes :

(1) $y' = 4y$ sur $\mathbf{R}$.

(2) $y' = -2y$ sur $\mathbf{R}$.

(3) $y' = x^3 y$ sur $\mathbf{R}$.

(4) $y' = \cos(x)y$ sur $\mathbf{R}$.

(5) $y' = e^x y$ sur $\mathbf{R}$.

(6) $y' = \frac{1}{x^2} y$ sur $\mathbf{R}_+^*$ avec condition initiale : $y(1) = 1$.

Exercice 2. On place dans un entrepôt une masse R_0 de radium 226, un déchet de la combustion en centrale nucléaire. On admet que la quantité (en grammes) de radium $R(t)$ à l'instant t (exprimé en années) subit un phénomène de désintégration suivant l'équation

$$R'(t) = -4.4 \cdot 10^{-4} R(t).$$

Combien de temps faut-il attendre pour que la moitié du radium disparaisse ?

Exercice 3. Résoudre, en utilisant la méthode de variation de la constante, les équations différentielles suivantes :

(1) $y' = 2y + x$ sur $\mathbf{R}$.

(2) $y' = y - e^x$ sur $\mathbf{R}$.

(3) $y' = xy + x$ sur $\mathbf{R}$.

(4) $y' = -2y + xe^{-x}$ sur $\mathbf{R}$ avec condition initiale $y(0) = 1$.

Exercice 4. On considère l'équation différentielle $(L) : x^3 y' + (2 - 3x^2)y = x^3$.

(1) Résoudre l'équation différentielle (L) sur $\mathbf{R}_-^*$ et sur $\mathbf{R}_+^*$.

(2) Peut-on trouver une solution sur $\mathbf{R}$? Si oui, laquelle ?

(3) Trouver la solution de (L) sur $\mathbf{R}_+^*$ telle que $y(1) = 0$.

Exercice 5. Le but de cet exercice est de résoudre sur l'intervalle le plus grand possible contenu dans $\mathbf{R}_+^*$ l'équation différentielle suivante :

$$(E) : y' - \frac{y}{x} - y^2 = -9x^2.$$

On admet que si y_1 et y_2 sont deux solutions sur $\mathbf{R}_+^*$ de (E) telles que $y_1(x_0) = y_2(x_0)$ pour un certain $x_0 \in \mathbf{R}_+^*$, alors $y_1 = y_2$. [1]

(1) Déterminer $a \in \mathbf{R}_+^*$ tel que $y_0 : x \mapsto ax$ soit une solution particulière de (E).

(2) Montrer que le changement de fonction inconnue : $y(x) = y_0(x) - \frac{1}{z(x)}$ transforme l'équation (E) en l'équation différentielle :

$$(E_1) : z' + \left(6x + \frac{1}{x}\right) z = 1.$$

---

1. Il s'agit d'un cas particulier d'un théorème général d'existence et d'unicité, appelé théorème de Cauchy-Lipschitz

(3) Résoudre l'équation différentielle (E_1) sur $\mathbf{R}_+^*$.

(4) En déduire les solutions de (E) définies sur $\mathbf{R}_+^*$.

Exercice 6. Déterminer les solutions, définies sur $\mathbf{R}$, des équations différentielles linéaires d'ordre 2 suivantes :

(1) $y'' + y' - 2y = 0$.

(2) $y'' - y' - 6y = 0$.

(3) $y'' - 2y' + y = 0$.

(4) $y'' + y = 0$.

(5) $y'' + y' + y = 0$, avec condition initiale $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$.

Exercice 7. La tension u (dépendant du temps t) aux bornes d'un condensateur pour un circuit RLC en série, soumis à un échelon de tension E, satisfait l'équation différentielle suivante :

$$LCu''(t) + RCu'(t) + u(t) = E,$$

où L, R, C et E désignent respectivement l'inductance de la bobine, la valeur de la résistance, la capacité du condensateur et la tension continue délivrée par le générateur.

(1) Résoudre l'équation différentielle en considérant les valeurs numériques suivantes : $LC = 20$, $RC = 4$ et $E = 50$ (unités SI).

(2) Tracer la courbe représentative de u.