IUT du Littoral Côte d'Opale — Année 2016/2017
DUT Informatique, 1ère année — Semestre 1
Module 1202 : Algèbre Linéaire — Feuille d'exercices 3

Bases d'espaces vectoriels de dimension finie

Exercice 1 :

1. Soit $\mathcal{C} = \{e_1, e_2\}$ la base canonique de $\mathbf{R}^2$. Exprimer, dans la base $\mathcal{C}$, les coordonnées des vecteurs suivants : $u = 3e_1 - 2e_2$ et $v = -e_1 + 5e_2$.
2. Soit $\mathcal{C} = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de $\mathbf{R}^3$. Exprimer, dans la base $\mathcal{C}$, les coordonnées des vecteurs suivants : $u = -e_1 + e_2 + 3e_3$ et $v = e_1 + e_3$.
3. Soit $\mathcal{C} = \{1, X, X^2\}$ la base canonique de $\mathbf{R}_2[X]$. Exprimer, dans la base $\mathcal{C}$, les coordonnées des polynômes suivants : $P = -3x^2 + 2X + 4$ et $Q = X^2 - X$.
4. Soit $\mathcal{C} = \{E_{ij}, 1 \leq i, j \leq 2\}$ la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$. Exprimer, dans la base $\mathcal{C}$, les coordonnées des matrices suivantes : $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Exercice 2 : Soit E un espace vectoriel de dimension 2 et soit $\mathcal{B} = \{e_1, e_2\}$ une base de E.

1. Montrer que la famille $\mathcal{B} = \{u, v\}$, où $u = -2e_1 + e_2$ et $v = e_1 + 3e_2$, est une base de E.
2. Montrer que la famille $\mathcal{L} = \{u, v\}$, où $u = -e_1 - e_2$ et $v = 2e_1 - 2e_2$, n'est pas une base de E.
3. Montrer que la famille $\mathcal{G} = \{u, v, w\}$, où $u = -e_1 + 3e_2$, $v = e_1$ et $w = e_1 - e_2$, n'est pas une base de E.

Exercice 3 : Soit E un espace vectoriel de dimension 2 et $\mathcal{B} = \{e_1, e_2\}$ une base de E. Posons $u = -2e_1 + 3e_2$ et $v = 3e_1 - 4e_2$.

1. Montrer que $\mathcal{B}' = \{u, v\}$ est une base de E.
2. Exprimer, dans la base $\mathcal{B}'$, les coordonnées des vecteurs $w_1 = -e_1 + 2e_2$ et $w_2 = 3e_2$.

Exercice 4 : Soit $\mathcal{C} = \{e_1, e_2\}$ la base canonique de $\mathbf{R}^2$ et soient f_1 et f_2 les vecteurs de coordonnées $(1, 1)$ et $(0, 2)$ dans la base $\mathcal{C}$. On désigne par P la matrice de la famille $\mathcal{B} = \{f_1, f_2\}$ dans la base $\mathcal{C}$.

1. Déterminer la matrice P.
2. Montrer que P est inversible et en déduire que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbf{R}^2$.
3. Calculer P^{-1} puis déterminer la matrice de passage $\mathrm{Pass}(\mathcal{B}, \mathcal{C})$.
4. Soit $u = -f_1 + 4f_2$. Déterminer les coordonnées de u dans $\mathcal{C}$.
5. Soit $v = 2e_1 + 3e_2$. Déterminer les coordonnées de v dans $\mathcal{B}$.

Exercice 5 : Soit $\mathcal{C} = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de $\mathbf{R}^3$ et soient f_1, f_2 et f_3 les vecteurs de coordonnées $(1, 0, 0)$, $(1, 2, 0)$ et $(-1, 3, 4)$ dans la base $\mathcal{C}$. On désigne par P la matrice de la famille $\mathcal{B} = \{f_1, f_2, f_3\}$ dans la base $\mathcal{C}$.

1. Déterminer la matrice P.
2. Montrer que P est inversible et en déduire que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbf{R}^3$.
3. Calculer P^{-1} puis déterminer la matrice de passage $\mathrm{Pass}(\mathcal{B}, \mathcal{C})$.
4. Soit $u = -f_1 + f_3$. Déterminer les coordonnées de u dans $\mathcal{C}$.
5. Soit $v = e_1 - 2e_2 + 3e_3$. Déterminer les coordonnées de v dans $\mathcal{B}$.

Exercice 6 : Soient $P = X^2 + 1$, $Q = X$ et $R = 1$ trois polynômes.

1. Déterminer la matrice $P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(\mathcal{B})$, où $\mathcal{B} = \{P, Q, R\}$ et où $\mathcal{C}$ désigne la base canonique de $\mathbf{R}_2[X]$.
2. Montrer que P est inversible puis calculer P^{-1}.
3. Exprimer les coordonnées du polynôme $S = X^2 + X$ dans la base $\mathcal{B}$.

Exercice 7 : Déterminer pour quelle(s) valeur(s) de $t \in \mathbf{R}$ la famille de vecteurs $\mathcal{F} = \{(1, 0, t), (1, 1, t), (t, 0, 1)\}$ constitue une base de $\mathbf{R}^3$.