Fiche n$^\circ$3. Relations.

Exercice 1. Soient E un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur E. Dans chacun des cas ci-dessous, étudier les propriétés (réflexivité, symétrie, transitivité) de $\mathcal{R}$.

(1) $E = \mathbf{R}^{\mathbf{R}}$ et $\mathcal{R}$ définie par $f\mathcal{R}g \iff f - g$ est paire .
(2) $E = \mathbf{R}$ et $\mathcal{R}$ définie par $x\mathcal{R}y \iff xe^y = ye^x$.
(3) $E = \mathbf{Z}$ et $\mathcal{R}$ définie par $x\mathcal{R}y \iff x$ divise y.

Exercice 2. Dans $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}^*$, on considère la relation $\mathcal{R}$ définie par $(x, y)\mathcal{R}(x', y') \iff xy' = x'y$.

(1) Démontrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
(2) Déterminer les classes d'équivalence de $(4, 2)$ et $(9, 6)$.

Exercice 3. Dans $\mathbf{C}$, on considère la relation $\mathcal{R}$ définie par $z\mathcal{R}z' \iff |z| = |z'|$.

(1) Démontrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
(2) Déterminer la classe d'équivalence de $1 + i$.

Exercice 4. On définit sur $\mathbf{R}^2$ la relation $\mathcal{R}$ par : $(x, y)\mathcal{R}(x', y') \iff 2x + y = 2x' + y'$.

(1) Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
(2) Déterminer la classe d'équivalence du couple $(0, 0)$.
(3) Déterminer la classe d'équivalence d'un couple quelconque (a, b) de $\mathcal{R}^2$.

Exercice 5. On définit sur $\mathbf{R}^2$ la relation $\mathcal{R}$ par : $(x, y)\mathcal{R}(x', y') \iff x + 5y = x' + 5y'$.

(1) Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
(2) Vérifier que la classe d'équivalence de $(0, 0)$, que l'on notera $[(0, 0)]$, est une droite D, à préciser.
(3) Soient a et b deux réels. Vérifier que la classe d'équivalence de $[(a, b)]$ est une droite parallèle à D.
(4) Soit $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ l'application définie par $f(x, y) = x+5y$. Montrer que pour tout $(a, b) \in \mathbf{R}^2$, on a $[(a, b)] = f^{-1}(\{f(a, b)\})$.
(5) Décrire géométriquement l'ensemble quotient $\mathbf{R}^2/\mathcal{R}$.

Exercice 6. Sur l'ensemble $\mathcal{D}$ de toutes les droites dans le plan $\mathbf{R}^2$, on considère la relation définie par $\alpha\mathcal{R}\beta \iff \alpha$ parallèle à β.

(1) Montrer qu'il s'agit d'une relation d'équivalence.
(2) Montrer que toute classe d'équivalence $[\alpha]$ contient une unique droite α_0 passant par $(0, 0)$.
(3) Pour $\alpha \in \mathcal{D}$, notons $(1, t(\alpha))$ l'intersection de α_0 avec la droite d'équation $x = 1$. Que représente $t(\alpha)$? La quantité $t(\alpha)$ est-elle bien définie ?
(4) Démontrer qu'il existe une bijection entre $\mathbf{R} \cup \{\infty\}$ et $\mathcal{D}/\mathcal{R}$.

Exercice 7. Soient A et B deux ensembles, $f : A \to B$ une application et $\mathcal{R}$ la relation définie par $x\mathcal{R}x' \iff f(x) = f(x')$.

(1) Démontrer que la classe d'équivalence de $a \in A$ est égale à $f^{-1}(\{f(a)\})$.
(2) En déduire que f est injective si et seulement si chaque classe d'équivalence est un singleton.
(3) Démontrer que $A/\mathcal{R}$ est en bijection avec $f(A)$.
(4) En déduire que f est surjective si et seulement si $A/\mathcal{R}$ est en bijection avec B.

Exercice 8. On dit qu'une relation $\mathcal{R}$ sur un ensemble E est *circulaire* si, pour tout $(x, y, z) \in E^3$, on a $(x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z) \Longrightarrow z\mathcal{R}x$. Montrer qu'une relation est réflexive et circulaire si et seulement si elle est une relation d'équivalence.

Exercice 9. Soit $\mathcal{R}$ la relation sur $\mathbf{N}^*$ définie par : $x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow \exists n \in \mathbf{N}^*, y = x^n$. Montrer que $(\mathbf{N}^*, \mathcal{R})$ est un ensemble partiellement ordonné.

Exercice 10. Soit $\mathcal{R}$ la relation sur $\mathbf{R}^2$ définie par :

$$(x, y)\mathcal{R}(x', y') \Longleftrightarrow (x \leq x') \text{ et } (y \leq y'),$$

où $\leq$ est l'ordre usuel sur $\mathbf{R}$. Démontrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre partiel.

Exercice 11. Soit $\mathcal{R}$ la relation sur $\mathbf{N}^2$ définie par :

$$(a, b)\mathcal{R}(c, d) \Longleftrightarrow (a < c) \text{ ou } (a = c \text{ et } b \leq d).$$

(1) Démontrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre.
(2) Cet ordre est-il total ?

Exercice 12. Soient E et F deux sous-ensembles de $\mathbf{R}$ et soit $f : E \to F$ une application injective. On considère la relation $\mathcal{R}$ définie sur E par $x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow f(x) \leq f(y)$, où $\leq$ représente l'ordre naturel dans $\mathbf{R}$.
(1) Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre.
(2) Montrer qu'il s'agit plus précisément d'un ordre total.

Exercice 13. Soit A un sous-ensemble de $\mathbf{R}$. Ecrire avec des quantificateurs les assertions suivantes :
(1) 10 est un majorant de A ;
(2) m est un minorant de A ;
(3) p n'est pas un majorant de A ;
(4) A est majorée ;
(5) A n'est pas minorée ;
(6) A est bornée.

Exercice 14. Donner, s'ils existent, le maximum, le minimum, la borne supérieure et la borne inférieure des sous-ensembles de $\mathbf{R}$ suivants :

$$A = \{x \in \mathbf{R} | x < 3\}, \quad B =]1, \pi], \quad C = \{x \in \mathbf{R} | x^2 \leq 2\}, \quad D = \{x \in \mathbf{Z} | x^2 \leq 2\}.$$

Exercice 15. Répondre aux mêmes questions qu'à l'exercice précédent en considérant cette fois-ci les sous-ensembles :

$$A = \left\{ -\frac{1}{n} | n \in \mathbf{N}^* \right\}, \quad B = \left\{ \frac{n}{n+1} | n \in \mathbf{N} \right\}, \quad C = \{(-2)^n | n \in \mathbf{N}\}.$$

Exercice 16. (1) Montrer qu'il n'existe pas de rationnel x tel que $x^2 = 2$.

(2) Déterminer, s'ils existent, le maximum, le minimum, la borne supérieure et la borne inférieure de $[0, \sqrt{2}] \cap (\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q})$ et de $[0, \sqrt{2}]$ en tant que sous-ensembles de $\mathbf{R}$.

Exercice 17. Soit $\mathcal{R}$ la relation sur $\mathbf{R}^2$ définie par :

$$(x_1, y_1)\mathcal{R}(x_2, y_2) \iff (x_1 \leq x_2) \text{ et } (y_1 \leq y_2),$$

où $\leq$ est l'ordre usuel sur $\mathbf{R}$ et soit $A = [0, 1]^2 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 | 0 \leq x \leq 1 \text{ et } 0 \leq y \leq 1\}$.

(1) (Re)-démontrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre partiel.

(2) Montrer que $(2, 3)$ est un majorant de A.

(3) La partie A admet-elle un plus grand élément (justifiez votre réponse) ? Si oui, en préciser la valeur.

(4) La partie A admet-elle une borne supérieure (justifiez votre réponse) ? Si oui, en préciser la valeur.

Exercice 18. Montrer que le sous-ensemble $D = \{r^2 | r \in \mathbf{Q}\} \cup \{-r^2 | r \in \mathbf{Q}\}$ est dense dans $\mathbf{R}$.