EILCO
MAT11
CP1, 1ère année
Année 2017-2018

Fiche n°4. Géométrie euclidienne.

Exercice 1. (1) A partir de la valeur exacte de $\cos(\frac{\pi}{6})$, et en utilisant les formules de trigonométrie, calculer les valeurs exactes de $\cos(\frac{\pi}{12})$ et $\sin(\frac{\pi}{12})$.

(2) En remarquant que $\frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}$, calculer les valeurs exactes de $\cos(\frac{5\pi}{12})$ et $\sin(\frac{5\pi}{12})$.

Exercice 2. Soit x l'unique nombre appartenant à l'intervalle $[\pi, \frac{3\pi}{2}]$ tel que $\sin(x) = -\frac{3}{4}$. Calculer les valeurs exactes de $\cos(x)$, $\cos(2x)$ et $\sin(2x)$.

Exercice 3. Soient A, B, C trois points du plan et soient $a = BC$, $b = AC$ et $c = AB$. On désigne par α, β, γ les angles $\widehat{BAC}$, $\widehat{ABC}$ et $\widehat{BCA}$. Le but de cet exercice est de démontrer la formule de Héron qui permet de calculer l'aire S du triangle ABC uniquement en fonction des longueurs a, b et c.

(1) En utilisant le produit scalaire, montrer que $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha)$.

(2) En déduire l'égalité suivante :
$$\sin^2(\alpha) = \frac{4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2}{4b^2c^2}.$$

(3) On note $p = \frac{a+b+c}{2}$ le demi-périmètre du triangle (ABC). Démontrer l'égalité suivante :
$$4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2 = 16p(p-a)(p-b)(p-c).$$

(4) En déduire la formule suivante : $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

Exercice 4. Soient A, B, C trois points du plan tels que $A(0,0)$, $B(14,0)$ et tel que le cercle de centre $D(8,4)$ soit inscrit au triangle (ABC). On note α l'angle opposé au côté BC, de même pour β et γ.

(1) Calculer les valeurs exactes de $\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ et $\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$.

(2) En déduire les valeurs exactes de $\sin(\alpha)$ et $\cos(\alpha)$.

(3) De la même manière, calculer $\cos(\beta)$ et $\sin(\beta)$.

(4) Démontrer les égalités suivantes :
$$\cos(\gamma) = -\cos(\alpha + \beta) \quad \text{et} \quad \sin(\gamma) = \sin(\alpha + \beta).$$
En déduire les valeurs exactes de $\cos(\gamma)$ et $\sin(\gamma)$.

(5) Déterminer les valeurs exactes des longueurs CA et CB.

Exercice 5. Soit $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ un repère orthonormé direct de l'espace $\mathcal{E}$ et soient $\vec{u} = (0,3,1)$, $\vec{v} = (0,1,2)$ et $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$.

(1) (a) Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$ puis déterminer une mesure de l'angle $(\vec{u}, \vec{v})$.

(b) Préciser les normes des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et en déduire la norme du vecteur $\vec{w}$.

(2) Déterminer les coordonnées du vecteur $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$ dans la base $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ et retrouver la valeur de la norme de $\vec{w}$.

(3) Calculer le déterminant $\mathrm{Det}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.

Exercice 6. Soit $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ un repère orthonormé direct de l'espace $\mathcal{E}$.

(1) Considérons les points $A(3,5,4)$, $B(2,1,3)$, $C(8,5,5)$ et $P(1,2,3)$ de l'espace.

  (a) Calculer le déterminant de $(\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PB}, \overrightarrow{PC})$.

  (b) Que peut-on dire des points A, B, C, P ? Justifier la réponse.

(2) Chacune des expressions suivantes a-t-elle un sens ? Si oui, préciser s'il s'agit d'un vecteur ou d'un réel. Sinon, dire pourquoi.

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w}), \quad \vec{u} \wedge (\vec{v} \cdot \vec{w}), \quad \vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}), \quad \vec{u} \cdot (\vec{v} \cdot \vec{w}), \quad (\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge (\vec{w} \wedge \vec{v}), \quad (\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot (\vec{w} \wedge \vec{w}).$$

Exercice 7. On considère dans l'espace $\mathcal{E}$ rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ les points $A(2,0,0)$, $B(2,-2,0)$ et $C(2,3,-1)$.

(1) Calculer le produit vectoriel $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}$.

(2) Calculer l'aire du triangle (OAB).

(3) Calculer le déterminant de $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$. En déduire le volume du parallélépipède induit par les vecteurs $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$.

(4) Déterminer un point D de l'espace tel que $\overrightarrow{OD}$ soit orthogonal à la fois à $\overrightarrow{OB}$ et à $\overrightarrow{OC}$.

Exercice 8. Soit $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ un repère orthonormé direct de l'espace $\mathcal{E}$.

(1) Soit $\mathcal{P}$ un plan de l'espace et $\vec{n} = (a, b, c)$ un vecteur. Montrer que $\vec{n}$ est un vecteur normal de $\mathcal{P}$ si et seulement si l'équation de $\mathcal{P}$ est : $ax + by + cz + d = 0$ pour un certain réel d.

(2) Soient $A(1,2,1)$, $B(2,1,0)$ et $C(0,4,2)$.

  (a) Calculer le produit vectoriel $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.

  (b) En déduire l'équation du plan (ABC).