IUT du Littoral Côte d'Opale — Année 2016/2017
DUT Informatique, 1ère année — Semestre 1
Module 1202 : Algèbre Linéaire — Feuille d'exercices 4

Applications linéaires

Exercice 1 : Les applications suivantes sont-elles linéaires ?

1. $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$ telle que $f(t) = (2t, -5t)$
2. $h : \mathbf{R}[X] \to \mathbf{R}^2$ telle que $h(P) = (P(0), P'(0))$
3. $g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ telle que $g((x,y)) = (5x - y, y, 2x + 3)$
4. $\psi : \mathcal{C}([0,1], \mathbf{R}) \to \mathbf{R}$ telle que $\psi(f) = \int_0^1 f(t)\, dt$

Exercice 2 :
Soient $f : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^3 & \to & \mathbf{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (y,0,0) \end{array}$ et $g : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^3 & \to & \mathbf{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x,0,z) \end{array}$.

1. Vérifier que f est un endomorphisme de $\mathbf{R}^3$.
2. Vérifier que g est un endomorphisme de $\mathbf{R}^3$.
3. Vérifier que $f \circ g = 0$.

Exercice 3 :
Soit $\mathcal{C} = \{e_1, e_2\}$ la base canonique de $\mathbf{R}^2$. On considère l'endomorphisme f de $\mathbf{R}^2$ défini par :

$$f(e_1) = 2e_1 - 5e_2 \quad \text{et } f(e_2) = e_1 + 2e_2.$$

1. Soit $u = e_1 + 6e_2$. Calculer $f(u)$.
2. Soit $v = xe_1 + ye_2$ avec $(x,y) \in \mathbf{R}^2$. Calculer $f(v)$ en fonction de x et de y.
3. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur (x,y) pour que $f(v) = 0_{\mathbf{R}^2}$.

Exercice 4 :
Soit $\mathcal{C} = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de $\mathbf{R}^3$. On considère l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ défini par :

$$f(e_1) = 2e_1 - 5e_2, \quad f(e_2) = e_2 + 2e_3 \quad \text{et } f(e_3) = e_1 + e_2 + e_3.$$

1. Écrire la matrice de f relativement à la base $\mathcal{C}$.
2. Soit $u = e_1 + e_2 - 2e_3$. Calculer $f(u)$.
3. Soit $v = xe_1 + ye_2 + ze_3$ avec $(x,y,z) \in \mathbf{R}^3$. Calculer $f(v)$ en fonction de x, y et z.
4. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur (x,y,z) pour que $f(v) = 0_{\mathbf{R}^2}$.
5. L'application f est-elle bijective ? Le cas échéant, déterminer la matrice de f^{-1} relativement à la base $\mathcal{C}$.

Exercice 5 :
On considère dans $\mathbf{R}^2$ muni de sa base canonique $\mathcal{C}$ les vecteurs $u = e_1 + e_2$, $v = 2e_1 - e_2$ et $w = e_1 + 4e_2$.

1. Vérifier que $\{u, v\}$ est une base de $\mathbf{R}^2$.
2. Pour quelle(s) valeur(s) de a existe-t-il une application linéaire $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ telle que $f(u) = v$, $f(v) = u$ et $f(w) = 5e_1 + ae_2$?

Exercice 6 :
Soient $\mathcal{C} = \{e_1, e_2\}$ la base canonique de $\mathbf{R}^2$ et $\mathcal{C}' = \{1, X, X^2\}$ la base canonique de $\mathbf{R}_2[X]$.
On considère l'application linéaire f de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}_2[X]$ défini par :

$$f(e_1) = X - 1 \quad \text{et} \quad f(e_2) = X^2 + 2X - 5.$$

1. Écrire la matrice de f relativement aux bases $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$.
2. Soit $u = -e_1 + 3e_2$. Calculer $f(u)$.
3. Soit $v = xe_1 + ye_2$ avec $(x, y) \in \mathbf{R}^2$. Calculer $f(v)$ en fonction de x et y.
4. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur (x, y) pour que $f(v) = 0_{\mathbf{R}_2[X]}$.
5. L'application f est-elle bijective ? Le cas échéant, déterminer la matrice de f^{-1} relativement aux bases $\mathcal{C}'$ et $\mathcal{C}$.

Exercice 7 :
On considère l'espace vectoriel réel $E = \mathbf{R}^3$ et on note $\mathcal{C} = \{e_1, e_2, e_3\}$ sa base canonique.

On s'intéresse à la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et on note f l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ dont A est la matrice dans la base canonique $\mathcal{C}$.

1. *Étude de l'endomorphisme f*
   (a) Déterminer l'image $f(u)$ d'un vecteur quelconque $u = (x, y, z)$ de $\mathbf{R}^3$ par f.
   (b) Vérifier que A est inversible et calculer A^{-1}.
   En déduire explicitement l'endomorphisme f^{-1}.
2. *Changement de base*
   (a) Soient $u = (1, 0, -1)$, $v = (0, -1, 0)$ et $w = (1, 0, 1)$.
   Montrer que la famille $\mathcal{B} = \{u, v, w\}$ est une base de $\mathbf{R}^3$.
   (b) Calculer $f(u)$, $f(v)$ et $f(w)$.
   (c) Déterminer D la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.
   (d) Donner P la matrice de passage de la base $\mathcal{C}$ à la base $\mathcal{B}$. Calculer son inverse P^{-1}.
   (e) Vérifier que $A = PDP^{-1}$.
3. *Une application*
   En déduire la matrice A^n pour tout entier naturel n.