EILCO
MAT11
CP1, $1^{\text{ère}}$ année
Année 2017-2018

Fiche n°5. Nombres complexes.

Exercice 1. Ecrire les nombres complexes suivants sous forme algébrique :

$$(1+i)^2, \qquad (1-i)^3, \qquad \frac{2+i}{1-i}, \qquad \frac{3+2i}{5-i}+\frac{1+i}{i}, \qquad \frac{5+i}{5-i}.$$

Exercice 2. (1) Ecrire sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

$$e^{i\frac{\pi}{3}}, \qquad e^{-i\frac{\pi}{2}}, \qquad 2e^{i\frac{\pi}{4}}, \qquad \frac{1}{3}e^{\frac{3i\pi}{4}}, \qquad \frac{4e^{i\frac{\pi}{6}}}{2e^{5i\frac{\pi}{3}}}.$$

(2) Ecrire sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants :

$$i, \qquad 1, \qquad 1+i, \qquad (1-i)^3, \qquad \frac{1-i}{1-i\sqrt{3}}.$$

Exercice 3. Résoudre dans $\mathbf{C}$ les équations suivantes :

$$2iz+1=-3z+i, \qquad z+2\overline{z}=3-4i, \qquad \overline{z}-1=z\overline{z}-i, \qquad \overline{z}=iz.$$

Exercice 4. (1) Calculer les racines carrées de $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$. En déduire les valeurs de $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

(2) Calculer les racines carrées de $\frac{\sqrt{3}+i}{2}$. En déduire les valeurs de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Exercice 5. (1) Résoudre dans $\mathbf{C}$ les équations suivantes :

(a) $z^2+z+1=0$.
(b) $z^2+(2-i)z-2i=0$.
(c) $z^2-\sqrt{3}z-i=0$.
(d) $4z^2-2z+1=0$.
(e) $z^3+(-3+i)z^2+(2-3i)z-6=0$.

(2) Résoudre dans $\mathbf{C}$ l'équation $z^4+2z^2+4=0$ et en déduire une factorisation du polynôme X^4+2X^2+4.

Exercice 6. (1) Développer l'expression $(a+ib)^3$, où a et b sont deux nombres réels.

(2) En utilisant la formule d'Euler, linéariser $\cos^3(x)$ et $\sin^3(x)$.

Exercice 7. Soient A, B et C trois points du plan d'affixes $z_A=-1+i$, $z_B=3-i$ et $z_C=3i$.

(1) Placer les points A, B et C dans un repère orthonormé.

(2) Déterminer un argument du nombre $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$. Que peut-on dire des droites (AC) et (AB) ?

Exercice 8. Soit $f:\mathbf{C}\to\mathbf{C}$, la fonction définie pour tout $z\in\mathbf{C}\setminus\{i\}$ par :

$$f(z)=\frac{z+1}{z-i}.$$

(1) Calculer $f(1+i)$.

(2) Résoudre dans $\mathbf{C}$ l'équation $f(z)=2+i$.

(3) Calculer $\mathrm{Re}(f(z))$ et $\mathrm{Im}(f(z))$ en fonction de $\mathrm{Re}(z)$ et $\mathrm{Im}(z)$.

(4) Déterminer l'ensemble Γ des points M d'affixe z tel que $f(z)$ soit imaginaire pure.

(5) Déterminer l'ensemble Δ des points M d'affixe z tel que $f(z)$ soit réel.

Exercice 9. On se place dans un repère orthonormé d'origine O. Soit $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ la fonction définie pour tout $z \in \mathbf{C}$ par $f(z) = z^2 + 1$.

(1) Déterminer les antécédents du point O.

(2) Existe-t-il des points invariants par f ? Si oui, préciser leurs affixes.

(3) Montrer que deux points symétriques par rapport à O ont la même image par f.

(4) Que peut-on dire des images de deux points symétriques par rapport à l'axe des abscisses ?

(5) Soit A le point d'affixe $z_A = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$. Déterminer l'affixe du point A' image de A par f puis prouver que les points O, A et A' sont alignés.