IUT du Littoral Côte d'Opale — Année 2016/2017
DUT Informatique, 1ère année — Semestre 1
Module 1202 : Algèbre Linéaire — Feuille d'exercices 5

Espaces vectoriels et sous-espaces vectoriels
en dimension finie

Exercice 1 :
Les ensembles suivants sont-ils des sev de $\mathbf{R}^2$ (respectivement $\mathbf{R}^3$) ?
Le cas échéant, en donner une base et la dimension.

1. $A = \{(1, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y \in \mathbf{R}\}$
2. $B = \{(a + 2b, -a, 5b) \in \mathbf{R}^3 \mid a \in \mathbf{R} \text{ et } b \in \mathbf{R}\}$
3. $C = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 3x + y = 0\}$
4. $D = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y = 0 \text{ et } z = y\}$

Exercice 2 : On se place dans l'espace vectoriel réel $E = \mathbf{R}^2$.
On considère les ensembles

$$F = \langle u\rangle = \{u \mid k \in \mathbf{R}\} \text{ avec } u = (1, -2) \in \mathbf{R}^2 \quad \text{et} \quad G = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 3x - y = 0\}.$$

Soient $v = (1, 1)$, $w = (-3, 6)$ et $z = (1, 3)$.

1. Vérifier que G est un sous-espace vectoriel de E.
2. Les vecteurs v, w et z appartiennent-ils à F ? à G ? Justifier.
3. Déterminer une base et la dimension de F.
4. Déterminer une base et la dimension de G.
5. Vérifier que $\{w, z\}$ est une base de $\mathbf{R}^2$.
6. Complément : Montrer que $F \cap G = \{0_{\mathbf{R}^2}\}$.
7. Complément : En déduire que F et G sont supplémentaires dans $\mathbf{R}^2$, à savoir $F \oplus G = \mathbf{R}^2$.

Exercice 3 : On se place dans l'espace vectoriel réel $E = \mathbf{R}^3$.
On considère les sous-espaces vectoriels suivants de E :

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid 2x + y - 4z = 0\}, \quad G = \{a(1, 2, 1) + b(2, -1, 0) \mid a \in \mathbf{R}, b \in \mathbf{R}\}$$

$$\text{et} \quad H = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid 2x - y = 0 \text{ et } x - z = 0\}.$$

Soient $v = (1, 2, 1)$, $w = (2, 0, 1)$ et $z = (6, 3, 2)$.

1. Les vecteurs v, w et z appartiennent-ils à F ? à G ? Justifier.
2. Déterminer une base et la dimension de F.
3. Déterminer une base et la dimension de G.
4. Déterminer une base et la dimension de H.

5. La famille $\{v, w, z\}$ est-elle une base de $\mathbf{R}^3$?

Exercice 4 : On se place dans $E = \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$, l'espace vectoriel réel dees matrices carrées réelles de taille 2.
Soit F l'ensemble des matrices carrées de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ lorsque a et b sont des réels. On note $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Justifier que F est un sev de E.
2. Vérifier que $\{I_2, A\}$ est une base de F. En déduire la dimension de F.
3. On considère les matrices $C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $C_2 = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$.
   (a) Les matrices C_1 et C_2 sont-elles inversibles ? Le cas échéant, déterminer leur inverse.
   (b) Écrire C_1 comme une combinaison linéaire de I_2 et de A.
   (c) La famille $\{C_1, C_2\}$ est-elle une base de F ?

Compléments **Exercice 5 :**
Soit $\mathcal{C} = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de $\mathbf{R}^3$. On considère l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ défini par sa matrice A dans la base $\mathcal{C}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer l'image $f(u)$ d'un vecteur quelconque $u = (x, y, z)$ de $\mathbf{R}^3$ par f.
2. On considère $F = \{u = (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid f(u) = 0_{\mathbf{R}^3}\}$.
   (a) Vérifier que F est un sev de $\mathbf{R}^3$.
   (b) Déterminer une base de F et en déduire sa dimension.