Mathématiques Générales – L1 Sciences de la Vie – 2017-2018

Fiche 1: Sous-ensembles, logique

1. Pour une étude de l'ensemble V des villes européennes, on note

$C \subseteq V$ le sous-ensemble des capitales,
$F \subseteq V$ le sous-ensemble des villes francophones,
$E \subseteq V$ le sous-ensemble des villes espagnoles.

Compléter le tableau suivant en précisant si les affirmations sont vraies ou fausses:

x	$x \in C$	$x \in C \cup E$	$x \in E^c$	$x \in C \cap F^c$
Paris				
Madrid				
Grenade				
Oxford				

2. Soit X l'ensemble des étudiant(e)s inscrit(e)s à l'ULCO. On considère les sous-ensembles suivants:

$F = \{x \in X \mid x \text{ est une fille}\}$,
$C = \{x \in X \mid x \text{ est dans cette classe}\}$,
$S = \{x \in X \mid x \text{ est inscrit(e) en L1 Sciences de la Vie}\}$.

(a) Si on désigne par $x_0 \in X$ soi-même, dire s'il est vrai ou faux que : $x_0 \in F$, $x_0 \in F^c \cap S$, $x_0 \in (F \cup C) \setminus S$.

(b) Décrire par "compréhension" les sous-ensembles suivants: $S^c \cap C$, $(F \setminus S^c)^c$, $(F^c \cap C) \cup F$.

(c) Formuler en termes de F, C et S les sous-ensembles suivants:

$U = \{x \in X \mid x \text{ est une fille qui n'est pas inscrite en L1 Sciences de la Vie}\}$,
$V = \{x \in X \mid x \text{ n'est pas dans cette classe mais c'est un garçon inscrit en L1 Sciences de la Vie}\}$,
$W = \{x \in X \mid x \text{ n'est ni une fille ni dans cette classe}\}$.

3. On pose $\Omega = \{1, 2, \ldots, 12\}$ et on considère $A \subseteq \Omega$ et $B \subseteq \Omega$ définis respectivement comme le sous-ensemble des nombres pairs et le sous-ensemble des multiples de 5 dans Ω.

(a) Expliciter les ensembles A, B, $A \cup B$ et $A \cap B$ et leurs complémentaires.

(b) Préciser les cardinaux de ces ensembles puis observer que $|A \cup B| + |A \cap B| = |A| + |B|$ et $|A^c| = |\Omega| - |A|$.

(c) Vérifier que $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ et également $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.

4. On désigne par E l'ensemble des enseignants à l'ULCO, par $B_0 \subseteq E$ le sous-ensemble des personnes aux cheveux bruns et par $B_1 \subseteq E$ le sous-ensemble des personnes aux cheveux blonds, puis par $P \subseteq E$ l'ensemble des Professeurs. Pour les affirmations suivantes, dire lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses, et pour lesquelles il manque des données pour conclure (et justifier les réponses):

(a) $|B_0| < |E|$

(b) $|B_1| < |E|$

(c) $|B_0| < |B_1|$

(d) $|E| = |B_0| + |B_1|$

(e) $|P| > |B_0|$

(f) $|P \cap B_0| = 0$

(g) $|B_0| + |B_0^c| = |E|$

(h) $|B_0 \cap B_1| = 0$

(i) $|P| + |B_1| < |B_0|$

5. Nier les assertions suivantes:

   (a) Dans toutes les écuries, tous les chevaux sont noirs.

   (b) Dans toutes les écuries, il y a (au moins) un cheval noir.

   (c) Dans toutes les écuries, il y a exactement un cheval noir.

   (d) Il existe un homme qui pèse plus de 120kg.

   (e) Tous les éléphants roses savent voler.

   (f) Pour tout entier n il existe un entier m tel que, soit $n = 2m$, soit $n = 2m + 1$.

Mathématiques Générales – L1 Sciences de la Vie – 2017-2018

Fiche 2: Dénombrement, probabilité

1. De combien de façons peut-on:

   (a) former un code de 4 chiffres pas nécessairement distincts?

   (b) former un code de 4 chiffres distincts?

   (c) constituer un ensemble de 4 chiffres distincts?

2. On lance deux fois de suite un dé parfait comportant 4 faces numérotées de 1 à 4. Soient les événements:

   A: on obtient au moins un chiffre pair,
   B: la somme des chiffres vaut au plus quatre.

   (a) Calculer $P(A)$, $P(B)$, $P(A^c)$, $P(B^c)$, $P(A \cap B)$, $P(A \cup B)$, $P_A(B)$ et $P_B(A)$.

   (b) Vérifier que $P(A \cup B) + P(A \cap B) = P(A) + P(B)$ et $P(A) = P_B(A)P(B) + P_{B^c}(A)P(B^c)$.

   (c) Les événements A et B, sont-ils indépendants?

3. Le loto consiste en un tirage de six boules parmi 49 boules numérotées. Quelle est la probabilité d'avoir exactement quatre numéros gagnants? six numéros gagnants? au moins cinq numéros gagnants?

4. On considère un groupe de 50 personnes.

   (a) Combien y a-t-il de répartitions posssibles des dates d'anniversaire des 50 personnes (aucune n'est née le 29 février)?

   (b) Même question en supposant que toutes les dates soient différentes.

   (c) Déterminer la probabilité que toutes les dates d'anniversaire soient différentes.

   (d) En déduire la probabilité qu'il y ait dans ce groupe au moins deux personnes ayant la même date d'anniversaire.

5. Une boîte contient 20 pièces d'équipemenent dont 8 sont défectueuses. On prend au hasard un lot de 5 pièces. Calculer les probabilités des événements suivants:

   (a) le lot a exactement deux pièces défectueuses,

   (b) le lot a au moins une pièce défectueuse,

   (c) le lot contient plus de bonnes pièces que de mauvaises pièces.

6. On estime que 0,1% d'une population donnée est atteinte d'une certaine maladie. Un test a été mis au point pour savoir si on est malade ou pas. On teste une personne choisie au hasard; si elle est malade, le test est positif dans 99% des cas et si elle est saine, le test est négatif dans 99% des cas. On note M l'événement "la personne testée est malade", et T l'événement "le test est positif".

   (a) Représenter cette situation à l'aide d'un arbre pondéré.

(b) Calculer la probabilité de l'événement $M \cap T$.

(c) Quelle est la probabilité que le test soit positif?

(d) Une personne se fait tester et le test est positif. Quelle est la probabilité que cette personne soit malade?

(e) Refaire le même exercice en supposant que 1% de la population est atteinte de la maladie.

7. D'après une enquête parmi 1000 femmes qui ont acheté un test de grossesse, on trouve les résultats suivants:

	test positif	test négatif
enceinte	540	60
pas enceinte	10	390

Pour une femme choisie au hasard parmi les 1000,

(a) quelle est la probabilité que le test soit négatif et la femme enceinte?

(b) quelle est la probabilité que le test soit positif?

(c) quelle est la probabilité, sachant que la femme est enceinte, que le test soit positif?

8. Le problème suivant est connu sous le nom de "paradoxe des deux enfants".

(a) Si on considère toutes les familles de deux enfants dont l'aîné est un garçon, calculer la probabilité que les deux enfants soient des garçons.

(b) Si on considère toutes les familles de deux enfants dont (au moins) un est un garçon, calculer la probabilité que les deux enfants soient des garçons.

(c) Si on considère toutes les familles de deux enfants, et on demande aux parents de déclarer le sexe d'un de leurs enfants, calculer la probabilité que les deux enfants soient des garçons *sachant que les parents ont déclaré qu'ils ont (au moins) un garçon.* (Il est utile de représenter cette situation à l'aide d'un arbre pondéré.)

Mathématiques Générales – L1 Sciences de la Vie – 2017-2018

Fiche 3: Nombres, polynômes

1. Simplifier les expressions:
   (a) $x^5 \cdot 3 \cdot x^2 \cdot 9 \cdot x^{-1} \dfrac{14}{x^4} \cdot \dfrac{3}{x}$
   (b) $(3(a+b)^2)^{-1}(4(a+b))^3(a-b)$
   (c) $(2^3)^4 \cdot 2^{3^4}$
   (d) $\dfrac{(a^{-3})^2}{\left(\frac{1}{a^3}\right)^{-1}}$
   (e) $\dfrac{\frac{a^{-2}}{b^7}b^{-3}}{a^2 \frac{1}{a^{-5}} \frac{b^2}{\frac{1}{a^3}}}$
   (f) $\sqrt[3]{(8a^6)^{\frac{1}{2}}}$
   (g) $\dfrac{x^{\frac{4}{3}}}{\sqrt{x^5}} \left(\dfrac{2}{x}\right)^{\frac{5}{2}}$
2. Calculer la somme et le produit des polynômes:
   (a) $x-1$ et $x-3$
   (b) x^2+4x-2 et $2x-5$
   (c) $2x^2-1$ et $7x^3-x$
   (d) $-x^3+x^2+1$ et x^3-x^2+x-1
3. Factoriser:
   (a) $x^7+3x^4-2x^3$ par $3x^2$
   (b) $2x^3-9x^2+11x-3$ par $2x-3$
   (c) $-2x^5+8x^4-3x^3-4x^2-5x-14$ par $-x^2+x+2$
4. Trouver les solutions réelles aux équations:
   (a) $3x+4=0$
   (b) $3x^2-\dfrac{9x}{2}-3=0$
   (c) $\dfrac{x^2}{4}=-\dfrac{7}{4}x-3$
   (d) $7x-28=\dfrac{-91}{x}$
   (e) $(x-1)(x+3)(x^2+1)=0$
   (f) $(2x+3)(x^2+3x+2)=0$
5. Calculer les racines réelles puis factoriser, lorsque cela est possible, les polynômes suivants:

(a) $3x^2 + 9$

(b) $x^2 + 4x + 3$

(c) $2x^2 - 4x + 6$

(d) $x^2 + 2x + 1$

(e) $-x^2 + 2x - 9$

(f) $3x^3 - 2x^2 - 2x + 1$ sachant que 1 est racine

(g) $x^3 - \frac{5x^2}{3} - \frac{11x}{3} - 1$ sachant que -1 est racine

(h) $x^3 - 7x^2 + 17x - 15$ sachant que 3 est racine

(i) $x^3 - 4x^2 - 11x + 30$ sachant que 5 est racine

6. Selon la loi de Poiseuille, la vitesse v (en m/s) d'un fluide dans un tuyau de longueur L et rayon R (en m), avec une différence de pression P (en $Pa = N/m^2 = kg/(ms^2)$) entre début et fin du tuyau, dépend de la distance r (en m) de l'axe central du tuyau de la manière suivante:

$$v = \frac{P}{4\eta L}(R^2 - r^2);$$

ici η est la viscosité du fluide. (Ce modèle est utilisé pour déterminer p.e. la vitesse du sang dans les artères.)

(a) L'unité historique de viscosité est le poiseuille (Pl); à l'aide de la formule ci-dessus, en donner une conversion en unités du système international (kg, m, s, ...).

(b) On suppose désormais que $\eta = 10$ (la viscosité de miel), $P = 10^5$ (à peu près la pression atmosphérique), $L = 0.3$ et $R = 0.01$. Déterminer la vitesse du fluide au centre du tuyau; observer que, à tout autre endroit, le fluide coule moins vite. Déterminer la distance au centre du tuyau à laquelle le fluide coule à un quart de la vitesse au centre.

Mathématiques Générales – L1 Sciences de la Vie – 2017-2018

Fiche 4: Fonction et graphe, droite et parabole

1. Déterminer le domaine de définition, et les valeurs limites aux bornes du domaine, des fonctions suivantes:
   (a) $f(x) = 2x - 10^{10}$
   (b) $f(x) = -2x^2 + 4x - 2$
   (c) $f(x) = x^3 + 2x + 1$
   (d) $f(x) = x\sqrt{x}$
   (e) $f(x) = -x^5 + x^3 - x$
   (f) $f(x) = \dfrac{1}{x-3} + 2$
   (g) $f(x) = \dfrac{3}{x+1}$
   (h) $f(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$
   (i) $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)^2}$
   (j) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^5-1}}$
2. Tracer avec précision les graphes des fonctions suivantes:
   (a) $f(x) = -3x + 5$
   (b) $f(x) = 2x + 4$
   (c) $f(x) = 3$
   (d) $f(x) = 4(x-3)$
3. Déterminer la fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dont le graphe est la droite passant par:
   (a) $(-1, 2)$ et $(3, 4)$
   (b) $(2, 2)$ et $(8, 2)$
   (c) $(0, 1)$ et $(1, 0)$
   (d) $(0, 0)$ et $(-5, 3)$
4. Résoudre l'équation $f(x) = 0$, réécrire la fonction $f(x) = ax^2 + bx + c$ sous sa "forme canonique" $f(x) = r(x-s)^2 + t$, puis tracer avec précision les graphes de:
   (a) $f(x) = x^2 + 4x + 3$
   (b) $f(x) = 3x^2 + 6x - 24$
   (c) $f(x) = x^2 + 1$
   (d) $f(x) = -3x^2 - 2x + 5$
   (e) $f(x) = -2x^2 - 4x - 6$

(f) $f(x) = x^2 + 2x + 1$

5. Pour chacune des inéquations suivantes, tracer dans un même repère les graphes des fonctions à gauche et à droite de l'inéquation puis calculer les valeurs de x pour lequelles l'inéquation est satisfaite:

   (a) $-2x + 4 > 0$

   (b) $x^2 + 3 < 1$

   (c) $x^2 \geq x$

   (d) $x^2 - x - 2 \leq 0$

   (e) $x^2 - x + 2 > x + 1$

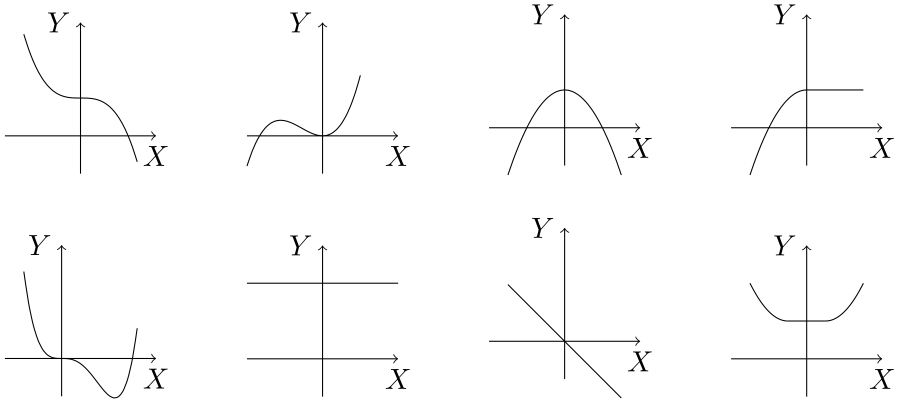
   (f) $2x + 3 \geq x^2 - x + 2$

6. Lorsqu'on donne un certain médicament à un patient par voie orale, on retrouve sa substance active dans le sang selon la formule $\frac{3q}{q^2+1}$, où q est la quantité du médicament administré (en grammes). Déterminer les valeurs de q pour lesquelles la présence de la substance active dans le sang est plus grand que 1.

Mathématiques Générales – L1 Sciences de la Vie – 2017-2018

Fiche 5: Tangente, dérivée

1. Pour les fonctions dont les graphes sont donnés ci-dessous, donner le tableau de signe de la dérivée.



2. Calculer la dérivée de:
   (a) $f(x) = 4x^3 + 12x^2 - 5x + 15$
   (b) $f(x) = x^3 + x$
   (c) $f(x) = \dfrac{4}{x} + x^2 - 4\sqrt{x}$
   (d) $f(x) = 3x^{\frac{2}{3}} - 5x^2 + 7x^{-1} + 3x - 1$
   (e) $f(x) = 6\sqrt[3]{x} + \dfrac{9}{x^3} + 15$

3. Utiliser au besoin la “règle de dérivation du produit” et/ou la “règle de dérivation en chaîne” pour calculer $f'(x)$:
   (a) $f(x) = (x^3 + 4)^2$
   (b) $f(x) = 2(x - 1)^{-2}$
   (c) $f(x) = (x^2 - 3x + 5)(2x^3 + x - 23)$
   (d) $f(x) = (2x - 1)\sqrt{x}$
   (e) $f(x) = 4x(x^2 - 2)^{-1}$
   (f) $f(x) = \sqrt{3x^3 - 1}$
   (g) $f(x) = (x^2 + 3)(x^2 - 2x)^5$

4. Utiliser la droite tangente au graphe de f au point x_0 pour donner une valeur approchée de $f(x_1)$:
   (a) $f(x) = x^5 - 9x^4 + 3x^3 - x^2 + x - 3$, $x_0 = 1$, $x_1 = 1.01$
   (b) $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 25$, $x_1 = 24.7$
   (c) $f(x) = x\sqrt{x}$, $x_0 = 1$, $x_1 = 0.8$

(d) $f(x) = \sqrt{3x+1}$, $x_0 = 5$, $x_1 = 5.1$

(e) $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$, $x_0 = 8$, $x_1 = 7.99$

5. Pour un certain modèle de mouvement de cellules dans un milieu (p.e. globules rouges dans le sang), on suppose que la distance parcourue par une cellule au temps t est donnée par $d(t) = at^b$, où a et b sont des coefficients liés aux circonstances (taille des cellules, viscosité du milieu, etc.); ici on supposera que $a = 0.005$ et $b = \frac{2}{3}$, et on exprimera le temps en secondes et la distance en milimètres.

   (a) Quelle est, selon ce modèle, la distance parcourue par une cellule en 125 secondes?

   (b) Dériver cette fonction et donner l'équation de la droite tangente au point $t_0 = 125$.

   (c) Supposons que l'outil pour mesurer le temps a une précision d'un centième de seconde. Avec quelle précision aura-t-on déterminé la distance parcourue par les cellules en 125 secondes?

6. A l'aide de $f'(x)$ et $f''(x)$, déterminer les points singuliers ainsi que leurs natures (minimum local, maximum local, point d'inflexion) des fonctions suivantes:

   (a) $f(x) = 4x - 2$

   (b) $f(x) = -x^2 + 4x - 1$

   (c) $f(x) = \dfrac{2x^3}{3} - x^2 - 12x + 17$

   (d) $f(x) = (x-5)^6$

   (e) $f(x) = \sqrt[3]{x^2+1}$

7. Lorsqu'on donne un certain médicament à un patient par voie orale, on retrouve sa substance active dans le sang selon la formule $\frac{3q}{q^2+1}$, où q exprime la quantité du médicament administré (en grammes, disons). Pour quelles valeurs de q (que l'on suppose positive) la présence de la substance active dans le sang est-elle maximale?

8. Einstein a montré que la masse d'un corps est fonction de sa vitesse: si on note $c = 299792458ms^{-1}$ pour la vitesse de la lumière (bien qu'on n'utilise souvent la valeur approchée $c \approx 300000000ms^{-1}$) et v est la vitesse du corps, la masse de ce corps est

$$m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}$$

   où v est exprimé en ms^{-1} et $0 \leq v < c$ (car aucun corps ne peut aller plus vite que la lumière).

   (a) Donner le domaine de définition de la fonction $v \mapsto m(v)$.

   (b) Que représente la constante m_0?

   (c) Etudier la limite de $m(v)$ lorsque v tend vers c.

   (d) Pour un Airbus A380, pesant 562 tonnes au repos, calculer sa masse lorsqu'il vole à 1040 km/h, sa vitesse de croisière.

   (e) Construire une approximation linéaire de la fonction $m(v)$ autour de $v_0 = 0$, et l'utiliser pour calculer la masse d'un cycliste de 70kg roulant à 36km/h.

Mathématiques Générales – L1 Sciences de la Vie – 2017-2018

Fiche 6: Exponentielle et logarithme

1. Résoudre les équations suivantes:
   (a) $2^x = 8$
   (b) $e^{-x} = \ln(2)$
   (c) $e^{3x} - e^{2x} = 0$
   (d) $e^{2x} - 5e^x + 6 = 0$
   (e) $\ln(x^2 + 9) = \ln(6) + \ln(x)$

2. Justifier les inégalités:
   (a) $3 \leq \log_{10}(6376) < 4$
   (b) $2 \leq \log_{10}(123.456789) < 3$
   (c) $4 \leq \log_{10}(10000) < 5$
   (d) $0 \leq \log_{10}(\pi) < 1$.
   (e) Généraliser cette observation pour estimer $\log_{10}(x)$ lorsque $x \geq 1$.

3. Dériver les fonctions suivantes:
   (a) $f(x) = e^{x^2-x+2}$
   (b) $f(x) = e^{-x+3} + 3e^{x^4}$
   (c) $f(x) = (x^3 - 4x^2 + 5)e^x$
   (d) $f(x) = \dfrac{xe^{x^2+1}}{x^3 - 1}$
   (e) $f(x) = \ln(x^2 + 3x - 1)$
   (f) $f(x) = x\ln(x)$
   (g) $f(x) = \ln\left(\dfrac{x}{x^2+1}\right)$
   (h) $f(x) = \ln(\sqrt{x^2 + 1})$

4. Donner l'équation de la fonction tangente au graphe de f au point x_0, puis donner une valeur approchée de $f(x_1)$:
   (a) $f(x) = e^x$, $x_0 = 0$, $x_1 = 0.01$,
   (b) $f(x) = \ln(2 + x)$, $x_0 = -1$, $x_1 = -0.96$.

5. Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$, puis déterminer les minima, maxima et/ou points d'inflexion des fonctions suivantes:
   (a) $f(x) = e^{x^2}$
   (b) $f(x) = (x^2 + 1)e^x$
   (c) $f(x) = xe^x$
   (d) $f(x) = (x^2 + 1)(\ln(x^2 + 1) - 1)$

6. La glycémie (= taux de sucre dans le sang, exprimé en grammes par litre) d'une personne au cours d'un repas varie en fonction du temps, selon la fonction

$$g(t) = \frac{8}{10}(1 + e^{-2t} - e^{-6t}),$$

t étant le temps depuis le début du repas, exprimé en heures.

(a) Que vaut la glycémie initiale? Et la glycémie quand $t \to +\infty$? (Interprétation?)

(b) Quelle est la glycémie maximale et quand est-elle atteinte?

7. Lors d'une expérience avec une population de bactéries, on compte au temps $t \geq 0$, exprimé en heures,

$$p(t) = 10^4 e^{\frac{t}{16}}$$

cellules individuelles.

(a) L'expérience a commencé avec combien de cellules?

(b) Cette population, augmente-elle ou diminue-t-elle?

(c) Quel est le taux de croissance de la population au début de l'expérience (en bactéries par heures) ? après 16h ? après 24h ?

8. Pour mesurer l'intensité acoustique d'un son (exprimé en Wm^{-2}) on utilise le décibel (dB): par définition, le nombre de décibels engendré par un son d'intensité I est donné par la fonction

$$N(I) = 10 \log_{10}\left(\frac{I}{I_0}\right),$$

où $I_0 = 10^{-12} Wm^{-2}$ (un picowatt par mètre carré) est la plus faible intensité perceptible par l'oreille humaine.

(a) Que vaut $N(I)$ lorsque $I = I_0$? $I = 10I_0$ (soit un son 10 fois plus fort) ? $I = 100I_0$?

(b) Calculer l'intensité sonore émise par :
– le chuchotement discret de deux étudiants en classe: 20dB,
– une conversation 'normale': 50dB,
– un avion au décollage (à 300m): 130dB.

(c) Dans un super-marché vous êtes face à deux lave-vaisselle. Le produit A fait un bruit mesuré à 39dB alors que le produit B est mesuré à 36dB. Le vendeur soutient que la différence de 3dB est infime. A-t-il raison ?

9. La force d'un tremblement de terre est mesurée par un nombre sans dimension, appelé magnitude. Dans l'échelle dite de Richter, la magnitude est donnée par la formule suivante:

$$M = \frac{2}{3}\log\left(\frac{E}{E_0}\right)$$

où E est l'énergie sismique du tremblement de terre considéré, E_0 une certaine énergie de référence, et où log désigne le logarithme décimal. On considère deux tremblements de terre, de magnitudes respectives M_1 et M_2.

(a) Si l'énergie sismique E_2 du deuxième est mille fois plus élevé que celle du premier, montrer que la différence $M_2 - M_1$ entre les deux magnitudes est égale à 2.

(b) Si la différence $M_2 - M_1$ entre les deux magnitudes est égale à 1 sur l'échelle de Richter, à combien le rapport $\frac{E_2}{E_1}$ des énergies sismiques est-il égal?

Mathématiques Générales – L1 Sciences de la Vie – 2017-2018

Fiche 7: Sinus et cosinus

1. Donner toutes les solutions aux équations suivantes:
   (a) $\sin(2x) = 0$
   (b) $\cos^2(x) = -\cos(x)$
   (c) $\sin(\frac{x}{3}) = \frac{1}{2}$
   (d) $\sin(x)\cos(x) = 2\cos(x)$
   (e) $2\sin^2(x) - \sin(x) - 1 = 0$

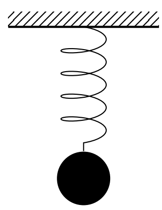
2. Dériver les fonctions suivantes:
   (a) $f(x) = \sin(x^2) + 3\cos(2x)$
   (b) $f(x) = (1 + \cos(x))^{-1}$
   (c) $f(x) = \sin(\sin(x))$
   (d) $f(x) = \sin^2(x)$
   (e) $f(x) = \sqrt{\sin^4(4x^2 + 3)}$
   (f) $f(x) = e^{3x}\sin(-x)$
   (g) $f(x) = \ln(\cos^2(x))$
   (h) $f(x) = \ln(x^4 + 3x^2 + 1)\sin(7x + 4)$

3. Déterminer les minima, maxima et points d'inflexion des fonctions suivantes:
   (a) $f(x) = \sin(x)\cos(x)$
   (b) $f(x) = \sin(x) + x$
   (c) $f(x) = \sin(x) + \cos(x)$

4. Utiliser la fonction tangente au graphe de f au point x_0 pour donner une valeur approchée de $f(x_1)$ (on pourra utiliser la valeur approchée $\pi \approx 3.14$):
   (a) $f(x) = \sin(x) + x\cos(x)$, $x_0 = \frac{\pi}{2}$, $x_1 = 1.5$
   (b) $f(x) = \sin^2(x)$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$, $x_1 = 0.76$
   (c) $f(x) = \sin(x) + x$, $x_0 = \frac{\pi}{3}$, $x_1 = 1$

5. On tire une boule massive (de masse m) suspendue à un ressort (de constante de raideur k), puis on la lâche. En supposant qu'il n'y a pas de frottements pour ralentir le mouvement, la fonction temporelle $h(t)$ de la position de la masse de part et d'autre de la position d'équilibre est donnée par:

$$h(t) = h_0 \cos(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t).$$



   (a) Que représente h_0?
   (b) Après combien de temps la boule repasse pour la première fois par la position d'équilibre, puis au plus haut, puis à nouveau en bas?

Mathématiques Générales – L1 Sciences de la Vie – 2017-2018

Fiche 8: Intégration

1. Justifier, sans aucun calcul, les (in)égalités suivantes:

   (a) $\int_0^{2\pi}(a\sin(x)+b\cos(x))dx = 0$ pour tout $a, b \in \mathbb{R}$

   (b) $\int_a^b e^x dx \geq 0$ pour tout $a \leq b \in \mathbb{R}$

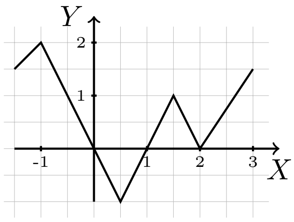
   (c) $\int_{-a}^{a} x^{1798765}dx = 0$ pour tout $a \in \mathbb{R}$

   (d) $\int_{-1}^{1}(x^2-1)dx < 0$ (Etudier le graphe de $f(x) = x^2 - 1$.)

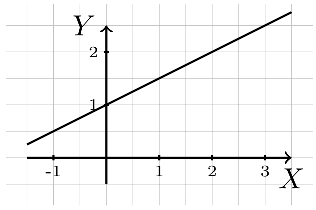
   (e) $\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}dx = \frac{\pi}{2}$ (Le graphe de $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ est un demi-cercle.)

2. Calculer les intégrales suivantes:

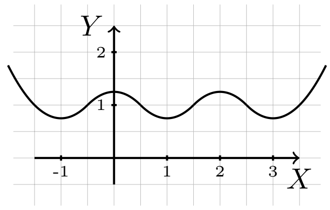
   (a) $\int_{-1}^{2} f(x)dx$



   (b) $\int_{0.5}^{2.5} f(x)dx$



   (c) $\int_{-1}^{3} f(x)dx$



3. Calculer les intégrales suivantes:

   (a) $\int_0^1(3x^3-4x^2+2x-7)dx$

   (b) $\int_{-1}^{3}(3x^2+x-1)dx$

   (c) $\int_1^e(x^{-2}+\frac{2}{x})dx$

   (d) $\int_{-1}^{1}(x-2)^{-2}dx$

   (e) $\int_9^{16}(\frac{6}{\sqrt{x}})dx$

   (f) $\int_{-2}^{0}(e^{3x}+x^2-1)dx$

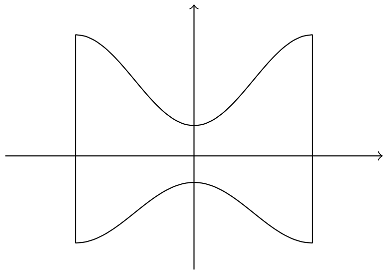
   (g) $\int_{-\pi/4}^{0}(2\cos(4x+\pi))dx$

   (h) $\int_3^8(\frac{1}{4\sqrt{x+1}}+x-1)dx$

   (i) $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{-2x}dx$

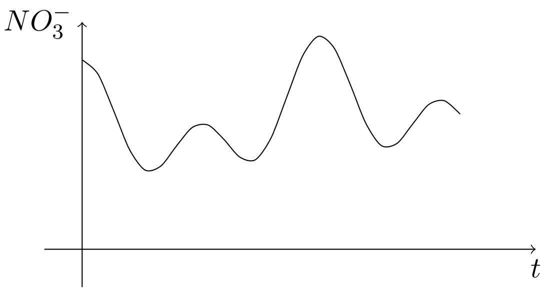
   (j) $\int_0^{3\pi}(4\sin(x)-7e^{-x})dx$

4. Calculer l'aire du "papillon" dans le dessin ci-dessous, sachant que la limite supérieure est donnée par la fonction $f(x) = \frac{6}{5}\cos(x+\pi) + 2$, la limite inférieure est donnée par $g(x) = \frac{8}{10}\cos(x) - \frac{3}{2}$, et sa largeur est égale à 2π:



5. Tracer avec précision les graphes de $f(x) = 3x + 1$ et $g(x) = x^2 - 6x + 10$, puis calculer l'aire de la surface délimitée par ces deux courbes.

6. Une sonde mesure la concentration de nitrates (en g/m^3) dans le tuyau d'évacuation d'une usine durant une heure, et produit ainsi (en fonction du temps t, en secondes s) le graphe ci-dessous:

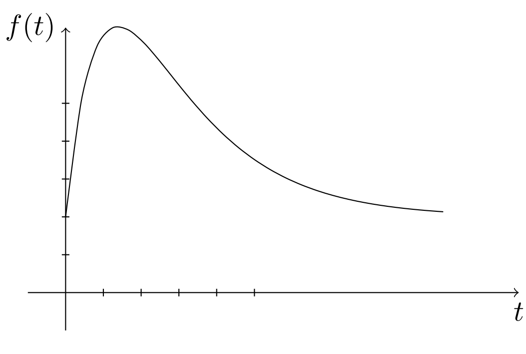


Avec des techniques d'adjustement de courbe, on établit que ceci est le graphe de la fonction

$$f(t) = \cos(\frac{t}{3600}) + \cos(\frac{t}{7200}) + \frac{t}{36 \cdot 10^4} + 3.$$

Si le débit des eaux usées de l'usine est de $0.2m^3/s$ (supposé constant durant cette période), quelle est la masse totale de nitrates expulsée par cette usine entre $t = 0$ et $t = 3600$?

7. Au décollage, un avion consomme plus de carburant que lors de la croisière: la consommation de carburant, en 100 litres par minute, est donnée par la fonction $f(t) = -e^{-t+3} + e^{-\frac{t}{2}+3} + 2$, dont voici le graphe:



Quel volume de carburant est nécessaire durant les 5 premières minutes du vol?